Bericht über die 4. Stufe der 39. Mathematik-Olympiade

Zur 4. Stufe vom 07. - 10. Mai 2000 in Berlin wurde durch den Schirmherrn Klaus Böger, Senator für Schule, Jugend und Sport des Landes Berlin, eingeladen. Die Durchführung und Organisation oblag dem Mathematikolympiaden in Berlin e. V. und der Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik.

Insgesamt nahmen an dieser Veranstaltung 181 Schülerinnen und Schüler teil. In fünf Altersgruppen (Kl. 8, 9, 10, 11 und 12/13) wurde um die besten Leistungen in zwei Klausuren zu je drei Aufgaben gestritten.

Die Jury verlieh 13 erste Preise, 23 zweite Preise und 37 dritte Preise. Für drei Schüler wird als Sonderpreis ein einwöchiges Praktikum finanziert, diese Preise wurden vom Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin und vom Institut für angewandte Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin gestiftet. Weitere drei Schüler erhielten Buchschecks der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 24 Teilnehmer eine Anerkennung und fünf Schüler Sonderpreise für die elegante Lösung einer Aufgabe.

Thüringen war mit 13 Startern vertreten, die sich durch ihre Ergebnisse bei der Landesmathematik-Olympiade (1. und 2. Preisträger) qualifiziert hatten. Dabei wurden folgende Ergebnisse erzielt:

1. Preis:	Martin Huschenbett (Albert-Schweitzer-Gymn. Erfurt, Kl. 9)
2. Preise:	Christian Richardt (Albert-Schweitzer-Gymn. Erfurt, Kl. 8)
	Christian Böhm (Staatliches Goethegymn. Weimar, Kl. 8)
	Tobias Schoel (Martin-Luther-Gymn. Erfurt, Kl. 8)
	Ralph Tandetzky (Carl-Zeiss-Gymn. Jena, Kl. 10)
3. Preise:	Clemens Dubslaff (Carl-Zeiss-Gymn. Jena, Kl. 8)
	Carsten Moldenhauer (Albert-Schweitzer-Gymn. Erfurt, Kl. 9)
	Sebastian Rolof (Albert-Schweitzer-Gymn. Erfurt, Kl. 9)
	Stefan Kratsch (Carl-Zeiss-Gymn. Jena, Kl. 11)

Ralph Tandetzky erhielt zudem einen Sonderpreis für die elegante Lösung einer Aufgabe. Seine und weitere zwei prämierte Lösungen erscheinen im Heft 9 des Mathematik-Olympiaden e. V.

Die weiteren Thüringer Starter waren:
Konrad Lötzsch (Carl-Zeiss-Gymnasium Jena, Kl.10), Markus Hansen (Albert-Schweitzer-Gymnasium Erfurt, Kl. 11), Andreas Gampe (Carl-Zeiss-Gymnasium Jena, Kl. 12), Björn Ebert (Goetheschule Ilmenau, Kl. 12)

Die Thüringer Schüler wurden durch Dr. Gerhard Roesch (Apolda) und Frank Göring (Ilmenau) begleitet.

Die Preisträger aller Klassenstufen größer 8, die aus Altersgründen noch zum Start berechtigt sind, wurden für die IMO-Auswahlklausuren vorgeschlagen.

Die Unterkunft und die Durchführung der Klausuren und Korrekturen erfolgte in der Internationalen Begegnungsstätte Jagdschloss Glienicke und dem Wannseeforum.

Hervorzuheben war das Rahmenprogramm. Am Montag war ein Besuch im IMAX (einem 3-d Kino) vorgesehen. Dort wurde der Film „Siegfried und Roy“ gezeigt. Anschließend konnten die Schülerinnen und Schüler nach Lust und Laune entscheiden, ob sie einen Spaziergang durch Berlin machen oder sich einige Sehenswürdigkeiten ansehen wollten. Jede Delegation wurde von einem Berliner Schüler betreut. Am Dienstag ging es nach dem Mittagessen zum Brandenburger Tor, anschließend wurde eine Besichtigung des Reichstages durchgeführt. Diese schloss sowohl das Parlament, als auch die neue Glaskuppel des Reichstages ein.

Am Abend wurde dann zum geselligen Abend eingeladen. Dieser bestand in einem kleinen Konzert unterschiedlicher Bands und Chöre aus verschiedenen Schulen Berlins. Danach stärkte man sich an einem Buffet, um dann frisch und fröhlich die Arbeiten der vorangegangenen Tage in Empfang zu nehmen. Nun wurde fleißig an den Einsprüchen gearbeitet, bis man, mittlerweile ganz erschöpft, das Gebäude verließ, um wieder zurück nach Wannsee oder Schloß Glienicke zu fahren.

Am Mittwoch fand die Siegerehrung im WISTA (Wissenschafts- und Wirtschaftsstandort Berlin-Adlershof) statt, an dem sich auch der Sitz des Instituts für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin befindet. Besonders die festliche Umrahmung durch den Chor des Hans-und-Hilde-Coppi-Gymnasiums Lichtenberg wird den Teilnehmern in Erinnerung bleiben. Sie sangen u. a. von den Beatles „Here comes the sun“ und „Michelle“. Der Festvortrag von Prof. Deninger (Universität Münster) zum Thema „Die Riemannsche Zeta-Funktion“ befaßte sich mit der berühmten Riemannschen Vermutung, die trotz größter Anstrengungen der Mathematiker in den letzten 100 Jahren weder bewiesen noch widerlegt wurde.

Stellvertretend wurde für das Organisationsteam Frau Dr. Monika Noack, Herrn Dr. Giessmann und Herrn Lange ganz herzlich (u.a. auch für das ausgezeichnete Wetter) gedankt.

Die 4. Stufe der 40. Mathematik-Olympiade wird im Mai 2001 in Magdeburg stattfinden. Danach folgen Hamburg, Bremen und Nordrhein-Westfalen.

Nun eine Aufgabe mit Lösungen und Bemerkungen. Aufgabe **391142** (identisch mit **391342**):

Zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geq 2$ bestimme man alle diejenigen Zahlen x, für die das Polynom

$$f(x) = (x-1)^4 + (x-2)^4 + (x-3)^4 + \cdots + (x-n)^4$$

seinen kleinsten Wert annimmt.

Lösung: Variante 1 (wurde von den meisten Startern beschritten):
Diese Aufgabe lässt sich algorithmisch mit Hilfe der Differentialrechnung lösen. Man differenziert und bestimmt die Nullstelle von $f'(x)$, wozu man die Formeln für $\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$ benötigt. Man erhält

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 4(x-k)^3 &= 4nx^3 - 12x^2 \sum_{k=1}^{n} k + 12x \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ &= 2n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)\left((x-n)^2 + (x-1)^2 + n - 1\right) , \end{aligned}$$

woraus man leicht die Extremstelle herleiten kann, zunächst als lokale Extremstelle, dann durch zusätzliche Argumente (z. B. durch Vorzeichendiskussion von $f'(x)$) als einzige Stelle mit globalem Minimum.

Variante 2 (zweithäufigster Weg):
a) Sei n eine gerade natürliche Zahl. Dann ergibt sich durch Anwendung der binomischen Formel $(a+b)^4+(a-b)^4 = 2a^4+12a^2b^2+2b^4$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n/2} (x-k)^4 + (x-n+k-1)^4 \\ &= \sum_{k=1}^{n/2} \left(\left(x-\frac{n+1}{2}\right) - \left(k-\frac{n+1}{2}\right)\right)^4 + \left(\left(x-\frac{n+1}{2}\right) + \left(k-\frac{n+1}{2}\right)\right)^4 \\ &= \sum_{k=1}^{n/2} 2\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^4 + 12\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^2\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^2 + 2\left(x-\frac{n+1}{2}\right)^4 \\ &\geq 2\sum_{k=1}^{n/2}\left(k-\frac{n+1}{2}\right)^4, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x=\frac{n+1}{2}$ ist.
b) Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Hier ergibt sich

$$f(x) = \left(x-\frac{n+1}{2}\right)^4 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (x-k)^4 + (x-n+k-1)^4 .$$

Analog zu a) erhält man $f(x) \geq 2\sum\limits_{k=1}^{(n-1)/2} \left(k-\frac{n+1}{2}\right)^4$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $x=\frac{n+1}{2}$ gilt.
In jedem Falle nimmt also $f(x)$ den kleinsten Wert genau dann an, wenn $x=\frac{n+1}{2}$ ist.

Variante 3, bearbeitet (Franz Andert, Heinrich-Hertz-Oberschule Berlin, erhielt hierfür einen Sonderpreis; es war die einzige Lösung, die vollständige Induktion verwendete)
f ist ein Polynom 4. Grades, der Koeffizient vor x^4 ist positiv, also ist der Graph dieser Funktion nach oben geöffnet. Die Ableitung $f'(x)$ hat als Summe streng monoton wachsender Funktionen auch diese Eigenschaft. Also hat $f'(x)$ höchstens eine Nullstelle. Der Schüler zeigt nun durch vollständige Induktion, dass $f'(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) = 0$ für alle $n \geq 2$ ist (Führen Sie dies selbst durch!). Somit hat f nur bei $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ ein lokales Extremum. Da der Graph von f nach oben geöffnet ist, muss ein lokales Minimum existieren, welches auch das globale Minimum ist. Da f' jeweils an genau einer Stelle null ist, muss an dieser Stelle auch das lokale bzw. das globale Minimum von f sein, denn nach dem notwendigen Kriterium wäre es an einer anderen Stelle nicht möglich. Somit erreicht f den kleinsten Funktionswert bei $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$.

Variante 4, bearbeitet (Johannes Lengler, Otto-Hahn-Gymnasium Saarbrücken, erhielt hierfür einen Sonderpreis.)
Es genügt offenbar, die Minimalstellen von $P(z) = f(z + \frac{n+1}{2})$ zu bestimmen. Ist nämlich z_0 eine Minimalstelle von P, so ist $x_0 = z_0 + \frac{n+1}{2}$ eine Minimalstelle von f.
Lemma: Für alle $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ mit $x > y \geq w > z$ und $g(z) = z^4$ gilt

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} > \frac{g(w) - g(z)}{w - z} .$$

Beweis: g ist zweimal differenzierbar und auf R streng linksgekrümmt. Deshalb gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\tfrac{g(x)-g(y)}{x-y} = g'(\xi) > g'(\eta) = \tfrac{g(w)-g(z)}{w-z} \text{ für ein } \xi \in (x, y), \eta \in (w, z).$$

Weiterhin gilt $(-x)^4 + x^4 \leq 2x^4 + 12x^2a^2 + 2a^4 = (-x+a)^4 + (x+a)^4$ für alle $x, a \in \mathbb{R}$. Folglich ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$P(a) = \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} ((-i+a)^4 + (i+a)^4) > \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} ((-i)^4 + i^4) = P(0) .$$

(Ist n ungerade kommt bei $P(a)$ noch der Summand a^4 hinzu.) Damit hat P sein einziges absolutes Minimum bei 0 und schließlich f sein einziges absolutes Minimum bei $\frac{n+1}{2}$.

Dr. Wolfgang Moldenhauer, Bad Berka

redaktionell gekürzt.

Tabelle 1: Ergebnisse nach Bundesländern

Land	Anzahl Starter	1. Preise	2. Preise	3. Preise	Anerkennungen	ø Punkte
Baden-Württemberg	11	1	3	2	-	25,5
Bayern	10	1	1	2	3	26,5
Berlin	13	1	1	5	4	27,2
Brandenburg	13	2	2	2	1	28,0
Bremen	7	-	-	-	1	17,9
Hamburg	12	1	3	1	3	26,5
Hessen	13	1	2	6	2	28,9
Mecklenburg-Vorpommern	11	1	2	3	1	27,3
Niedersachsen	9	-	-	-	1	17,4
Nordrhein-Westfalen	12	1	-	4	1	25,6
Rheinland-Pfalz	11	-	-	1	3	17,9
Saarland	10	-	1	-	-	13,6
Sachsen	13	1	2	3	2	27,5
Sachsen-Anhalt	13	2	2	4	-	27,8
Schleswig-Holstein	10	-	-	-	1	15,8
Thüringen	12	1	4	4	-	27,2

Bemerkung: Pro Starter waren 40 Punkte erreichbar.