Die Anfänge des Zählens und Rechnens

von Roland Fiedler

Der nachfolgende Artikel erschien im Original in Die $\sqrt{\text{WURZEL}}$, Heft 7+8 des Jahres 1984. Die damals enthaltenen Bilder konnten leider wegen fehlender Quellenangaben hier nicht reproduziert werden. Zum Ausgleich sind die nicht-lateinischen Schriftzeichen im Text in einer deutlich besseren Qualität zu sehen, da sie nicht wie anno 1984 von Hand eingefügt werden mussten.

Stefan Möbius

Es ist uns heute nicht möglich, genaue Angaben über die Anfänge der Mathematik, des Zählens und Rechnens zu machen. Erhalten gebliebene Bild- und Schriftdokumente aus vergangenen Zeitepochen berichten zuverlässig über den Entwicklungsstand der Wissenschaften jener Zeiten und gestatten Rückschlüsse auf die Zahlenschreibweisen und die genutzten Zahlensysteme. Zu den ältesten ägyptischen Schriften gehört ein Rechenbuch, welches vor ca. 3600 Jahren von einem Schreiber namens Ahmes verfaßt wurde. Es beginnt mit den vielversprechenden Worten "Vorschrift zu gelangen zur Kenntnis aller dunklen Dinge . . . aller Geheimnisse, welche enthalten sind in den Gegenständen" und beinhaltet u. a. Bruchrechnungen und geometrische Aufgaben.

Mit Sicherheit jedoch reichen die Anfänge der Mathematik Jahrtausende weiter zurück. Vor 12.000 bis 15.000 Jahren setzte mit dem Beginn der Seßhaftigkeit der Sippen und Stämme der Prozeß der Arbeitsteilung ein; zwischen den Stämmen kam es zu Handels- und Austauschbeziehungen; die sichere Bestimmung der Termine von Aussaat und Ernte leitete man aus der Beobachtung von Bewegungsvorgängen am Sternenhimmel ab – es entstand die Notwendigkeit des Zählens und Rechnens. Diese Anfänge können heute an Stämmen studiert werden, deren Entwicklungsniveau dem unserer steinzeitlichen Vorfahren gleichkommt und die z. B. in Südamerika, Australien, Mikronesien, Polynesien oder auch auf den Fidschi-Inseln gegenwärtig leben. Auf einer der niedrigsten Stufen stehen die Bewohner der Fidschi-Inseln im Stillen Ozean. Sie verbinden Zahlwörter mit konkreten Gegenständen, so daß 10 Kokosnüsse mit "karo", 10 Boote dagegen mit "bole" bezeichnet werden.

Die Herausbildung abstrakter Zahlwörter erfolgte in mehreren Stufen. Floridas Einwohner gebrauchen für 10 Eier das Wort "na-kua", für 10 Körbe das Wort "na-banara". Die Zahl 10 für sich, etwa durch das Wort "na" ausgedrückt, gibt es jedoch noch nicht. Im Sprachgebrauch der Indianer West-Kanadas heißen "tscha" – 3 Dinge, "tchane" – 3 Personen, "tchat" – 3mal, "tchatoen" – an 3 Stellen, ein abstraktes Wort für 3 existiert nicht.

Stämme, deren Sprachen bereits abstrakte Zahlwörter einschließen, können in der Regel bis 3, 4, oder 6 zählen, größere Mengen erhalten die Bezeichnung "viel". So zählt der Indianerstamm der Yankos am Amazonas bis 3 und gebraucht für diese Zahl das Wörtchen "Poettarrarorincoaroac"!

Der Aufbau der verwendeten Zahlensysteme basiert auf Grundzahlen, als deren häufigste 2, 5, 10, aber auch die 20 und die 60 zu nennen sind. Oftmals entwickelten sich selbst bei benachbarten Stämmen Systeme mit unterschiedlichen Grundzahlen. Ein Beispiel dafür sind die Einwohner einer Inselgruppe in der Torrestraße südlich Neuguineas, die im Zweiersystem rechnen, während in der Sprache Wedau in Neuguinea die 5 Grundzahl ist. Beide System sind unschwer zu erkennen:

1	–	urapun	tagogi	
2	–	okosa	ruag'a	
3	–	okosa-urapun	tonug'a	
4	–	okosa-okosa	ruag'a-ma-ruag'a	
5	–	okosa-okosa-urapun	ura-i-ga	
6	–	okosa-okosa-okosa	ura-g'ela-tagogi	$= 5 + 1$
11	–		ura-g'a-i-ga-au-ae-tagogi	$= 5 \cdot 2 + 1$

Einem anderen südostaustralischen Stamm dient wiederum die 2 als Grundzahl:

1	–	enea
2	–	petcheval
3	–	petcheval-enea

Demgegenüber basiert das Zahlensystem der Mayas, einem Volk auf der mexikanischen Halbinsel Yucatán, auf der Zahl 20.

Wie wir schon festgestellt hatten, ist das Rechenbuch des ägyptischen Schreibers Ahmes die älteste erhalten gebliebene mathematische Schrift. Zu den hauptsächlichen Gründen, daß keine älteren Aufzeichnungen existieren (bzw. bisher aufgefunden wurden), gehört der natürliche Verschleiß des Schreibmaterials. Immerhin wurden die ersten Schriften auf Palmenblättern verfaßt! Die Ägypter stellten ihr Schreibmaterial aus einem Schnittgewächs her, welches in großen Mengen am Nil wuchs. Eine daraus gefertigte Buchrolle heißt Papyrus. Die Babylonier hingegen drückten Zahlen und Buchstaben in feuchte Tontäfelchen und brannten diese anschließend. Mehrere Tausend solcher Täfelchen sind erhalten geblieben, und sie geben heute einen guten Überblick über den damaligen Entwicklungsstand der Mathematik.

Die Römer wiederum nutzten eine andere Möglichkeit: Sie erfanden das Pergament, hergestellt aus bearbeiteter Tierhaut. Papier verwendeten zum ersten Male Chinesen. Die ältesten Überlieferungen auf Papier stammen aus dem 2. Jahrhundert v. u. Z.

Eine große Anzahl von Dokumenten wurde jedoch auch vernichtet: In der im 3. Jahrhundert v. u. Z. in Alexandria (heute El-Iskandariya) eröffneten Bibliothek, der größten der damaligen Zeit, sammelten sich nahezu 700.000 Buchrollen an. Doch im Jahre 47 v. u. Z. zerstörten römische Krieger die wissenschaftlichen Einrichtungen und die Bibliothek von Alexandria.

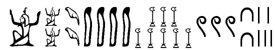
Aus den überlieferten Aufzeichnungen sind die Zahlenschreibweisen der Ägypter, Babylonier und Griechen bekannt geworden. Die Zahlen der Ägypter ähnelten ihrer Schrift, einer Bilderschrift. Jedes einzelne Bildzeichen, auch Hieroglyphe genannt, stellt ein bestimmtes Wort dar. Für ihr dezimales Zahlensystem verwendeten die Ägypter sieben Hieroglyphen:

1	–	𓏺	100	–	𓍢	10.000	–	𓂭	1.000.000	–	𓁨
10	–	𓎆	1.000	–	𓆼	100.000	–	𓆐			

wobei jeder eine besondere Bdeutung zukam. So könnte die Hieroglyphe eine Meßleine darstellen, die in 100 Teile geteilt war; die 1.000 wird durch eine Lotosblume veranschaulicht; der Frosch findet für die 100.000 wohl deshalb Verwendung, weil dieser einst eine regelrechte Plage gewesen sein soll; schließlich konnte die größte Zahl der Ägypter nur durch ein angemessenes Zeichen, nämlich den ägyptischen Gott des Luftraumes, dargestellt werden.

Beliebige Zahlen wurden einfach durch Aneinanderreihen der enstprechenden Hieroglyphen geschrieben:

213.104 = 

3.248.327 = 

Die Babylonier nutzten hingegen vor ca. 4000 Jahren ein Zahlensystem mit nur zwei Symbolen und der 60 als Grundzahl. Für alle Potenzen $(60)^0$, $(60)^1$, $(60)^2$, $\ldots$, $(60)^n$ wurde ein senkrechter Keil

geschrieben, die Zahl 10 erhielt einen Winkelhaken

Die Zahlen von 1 bis 59 lassen sich durch Aneinanderreihen von Winkelhaken und Keilen darstellen, wobei i. a. nie mehr als drei Zeichen, die eine Zahl ausdrücken sollten, nebeneinander geschrieben wurden:

3 =  5 =  57 = 

Die 60 wird nun wieder durch einen Keil dargestellt, wobei sich beim Lesen von Keilschriftzahlen folglich Schwierigkeiten ergeben können, denn

kann sowohl die 3 als auch die $60 + 2 = 62$, die $2 \cdot 60 + 1 = 121$ oder die $3 \cdot 60 = 180$ bezeichnen.

Die 600 als Produkt $10 \cdot 60$ wird nicht durch zehn Keile, sondern durch den bereits bekannten Winkelhaken ausgedrückt. Demnach könnte

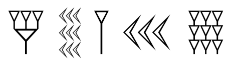
$$\begin{array}{ccrcrcr} 4 & \cdot & 10 & + & 2 & = & 42 \\ 4 & \cdot & 600 & + & 2 & = & 2402 \\ 4 & \cdot & 600 & + & 60+1 & = & 2461 \\ 4 & \cdot & 600 & + & 2 \cdot 60 & = & 2520 \end{array}$$

bedeuten.

Es muß aber bemerkt werden, daß die Babylonier keine rein mathematischen Texte schrieben, sondern der entsprechenenden Aufgabe stets eindeutig die dazugehöringen Zahlen entnommen werden konnten.

Versuchen wir uns zum Abschluß an der Übersetzung der Zahl 19899 in die babylonische Keilschrift. Die höchste enthaltene Potenz von 60 ist offensichtlich 60^2, denn $60^3 = 216000$ ist bereits größer als 19899. 60^2 selbst ist 4-mal enthalten. Die verbeliebende Differenz von 5499 ist nun bezüglich Vielfacher von 600 und 60 zu zerlegen. Wir finden eindeutig

$$19899 = 4 \cdot 60^2 + 9 \cdot 600 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 9 \cdot 1, \text{also}$$



Betrachten wir abschließend noch kurz die alte griechische Zahlenschreibweise: Jeder Buchstabe des griechischen Alphabets stellt eine Zahl – Einer, Zehner, Hunderter – dar, wobei für 6, 90, und 900 drei zusätzliche Zeichen (vau, koppa, sampi) eingefügt wurden:

α	β	γ	δ	ε	ϝ	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	ς	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Um für die Tausender keine weiteren Symbole einführen zu müssen, setzten die Griechen vor den entsprechenden Buchstaben der Einer ein Komma, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 4000 &= {,}\delta \\ 8000 &= {,}\eta \end{aligned}$$

Zur Darstellung der Zehntausender fanden verschiedene Schreibweisen Anwendung. Eine Möglichkeit bestand in der Kennzeichnung mittels zweier Punkte über dem Buchstaben, der die Anzahl der Zehntausender ausdrückte, also

$$\begin{aligned} 10000 &= \ddot{\alpha} \\ 70000 &= \ddot{\zeta} \end{aligned}$$

Zum anderen schrieben die Griechen ein großes M und über dieses die Anzahl der Zehntausender:

$$
\begin{aligned}
10000 &= \overset{\alpha}{\mathrm{M}} \\
70000 &= \overset{\zeta}{\mathrm{M}} \\
450000 &= \overset{\mu\varepsilon}{\mathrm{M}}
\end{aligned}
$$

Um nun schließlich den Unterschied zwischen Buchstaben und Zahlen kenntlich zu machen, wurde über eine abgeschlossene Zahlengruppe ein Strich gezogen:

$$
\begin{aligned}
49 &= \overline{\mu\vartheta} \\
3718 &= \overline{,\gamma\psi\iota\eta} \\
122560 &= \overline{\ddot{\iota}\ddot{\beta},\beta\varphi\xi} = \overset{\iota\beta}{\mathrm{M}}\overline{\beta\varphi\xi}
\end{aligned}
$$

Natürlich gab es noch sehr viele andere Formen von Zahlzeichen, jedes Volk entwickelte seine eigene Sprache und Schrift. Die Chinesen, Inder und Römer, aber auch die Mayas, schrieben die Zahlen mit Hilfe von Punkten und Strichen. Bis in das 15. Jahrhundert war das römische System in Europa gebräuchlich. Eine spätere Arbeit wird darüber und über die Entstehung unserer heutigen Zahlenschreibweise berichten.

Dipl.-Phys. Roland Fiedler, Sektion Physik der FSU Jena