

Fourieranalyse imperfekter sinusförmiger Zeigermodellprojektionen

von PETER STAREK, Donauwörth

Der Artikel „Fourieranalyse imperfekter sinusförmiger Zeigermodellprojektionen“ aus \sqrt{WURZEL} 9+10/2017 bleibt noch die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n schuldig. Diese soll hier erläutert werden. Bis auf die Herleitung der b_n in Abschnitt 2.1 ist die hier vorliegende Version des Artikels identisch zu der in Heft 9+10/2017.

1 Einleitung

Harmonische Schwingungen sind in unserer Natur allgegenwärtig anzutreffen. Aus dem Schulunterricht ist bekannt, dass sich harmonische Schwingungen durch Betrachtung eines gleichförmig bewegten rotierenden Einheitszeigers projektiv erzeugen lassen. Betrachten wir dazu Abbildung 1. In der Lage 1 (d. h. zum Zeitpunkt $t = t_1$) sei der Zeiger auf den Punkt P_1 gerichtet. Diese Situation spiegelt sich projektiv im rechten Schaubild im Punkt P'_1 wider. Nun lassen wir den Zeiger weiter entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ rotieren. Dabei verschiebt sich der Punkt entlang der Kreisbahn in die Lage 2 auf P_2 wobei insgesamt der Winkel t_2 zurückgelegt wurde. Der horizontale Abstand von P_2 zur vertikalen Achse durch den Kreismittelpunkt beträgt $\cos t_2$, der vertikale Abstand von P_2 zur horizontalen Zeitachse beträgt $\sin t_2$. Wenn wir den vertikalen Abstand über den Winkel t projizieren (d. h. über den zeitlichen Fortgang der Zeigerbewegung), ergibt sich wie im rechten Schaubild ersichtlich eine monofrequente („reine“) Sinusschwingung der Frequenz $\omega = 1$. Hierin ist auch unser Punkt P'_2 wiederzufinden.

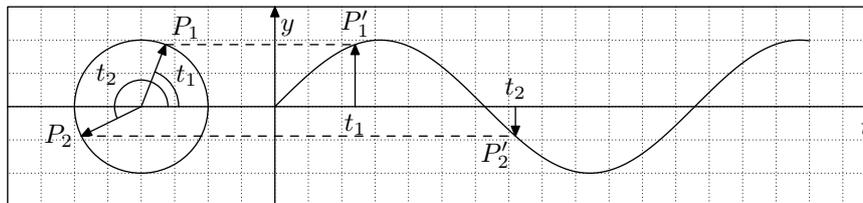


Abb. 1 Erzeugung einer Schwingung mittels Zeigermodell

Eine große Rolle spielen auch allgemeine (nicht harmonische) periodische Signale, welche als Überlagerung einer Reihe von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen verstanden werden können. Eine solche Funktion ist dann als eine sogenannte Fourier-Reihe dargestellt, in der sich ihre spektralen diskreten Frequenzkomponenten zeigen. Das Spektrum einer solchen Funktion gibt an, in welchem Maße die verschiedenen harmonischen Komponenten in ihr enthalten sind. Bei einer harmonischen Schwingung ist nur eine einzige harmonische Komponente vorhanden, nämlich genau die Schwingung selbst. Wird die harmonische Funktion modifiziert, enthält das Spektrum zusätzlich zur Grundschwingung auch höhere Schwingungen, welche auch Oberwellen genannt werden.

Die in diesem Artikel untersuchte Fragestellung ist nun, in welchem Maße das Frequenzspektrum „verschmiert“, wenn sich der Zeiger nun nicht mehr auf dem Einheitskreis, sondern, bedingt durch irgendwelche Imperfektionen (z. B. verursacht durch unsachgemäßen technischen Aufbau), auf einer Ellipsenbahn bewegt. Diesem Umstand wollen wir im nächsten Abschnitt nachgehen.

2 Mathematische Betrachtung

Den Ausgangspunkt unserer Überlegung bildet die Ursprungsgleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit der Hauptachse $2a$ und Nebenachse $2b$ ($a, b > 0$). Diese Gleichung kann durch elementare Umformung von der unabhängig veränderlichen Variablen x befreit und durch die Zeit t , die Winkelgeschwindigkeit ω sowie die Parameter a, b ausgedrückt werden:

$$y(t) = \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right) \sin^2 \omega t}}. \quad (1)$$

Durch Wahl der Achsen-Parameter a, b können wir (1) als Funktionenschar auffassen. Bevor wir uns der Frequenzanalyse dieser Funktionenschar zuwenden, wollen wir ein Gefühl dafür gewinnen, wie Änderungen der Parameter (d. h. Formänderungen der Ellipsenbahnen) sich auf das Aussehen der projizierten Schwingung auswirken. Zu diesem Zweck wählen

wir fortan o. B. d. A. $b = 1$ und variieren den Parameter a .¹ Zentraler Gegenstand unserer Untersuchung ist damit die parametrisierte Funktion

$$y_a(t) = \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}}. \quad (2)$$

Der triviale Fall $a = 1$ mündet in unsere eingangs erwähnte Sinusschwingung, denn

$$y(t) = \frac{1 \cdot \sin \omega t}{\sqrt{1 + (1^2 - 1) \sin^2 \omega t}} = \sin \omega t. \quad (3)$$

Sei nun $a > 1$. Der Fall $a = 2$ ist in Abbildung 2 ersichtlich. Für $a = 10$ ergibt sich Abbildung 3. Man erkennt tendenziell, dass sich mit steigenden Werten für a die Projektion einer Rechteckschwingung anschmiegt, d. h., im Grenzfall $a \rightarrow \infty$ ist mit Gleichung (2)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{a} \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + (1 - \frac{1}{a^2}) \sin^2 \omega t}} = \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\sin^2 \omega t}} = \frac{\sin \omega t}{|\sin \omega t|}. \quad (4)$$

Die Funktion (4) enthält Definitionslücken bei $\omega t = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und es gilt für die rechts- und linksseitigen Grenzwerte

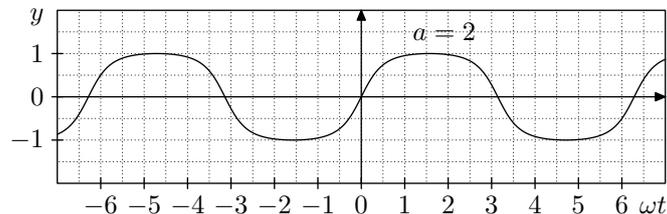
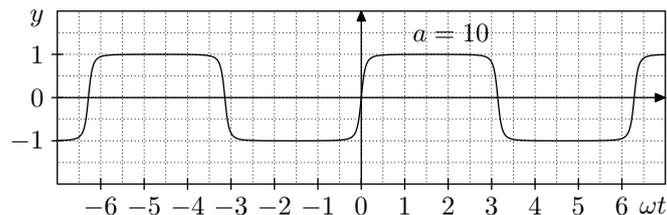
$$\lim_{\omega t \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin \omega t}{|\sin \omega t|} = -1, \quad \lim_{\omega t \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin \omega t}{|\sin \omega t|} = +1$$

für ungerade n sowie

$$\lim_{\omega t \rightarrow n\pi^+} \frac{\sin \omega t}{|\sin \omega t|} = +1, \quad \lim_{\omega t \rightarrow n\pi^-} \frac{\sin \omega t}{|\sin \omega t|} = -1$$

für geradzahlige n .

¹Offensichtlich hängt die Verteilung des Frequenzspektrums aufgrund der Struktur von (1) nur vom Verhältnis $\frac{a}{b}$ ab.

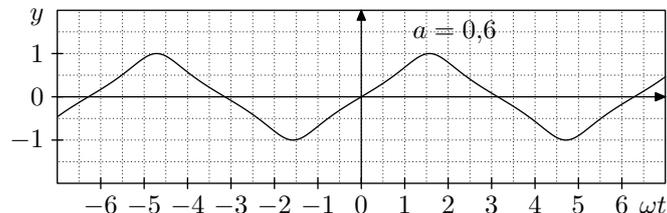
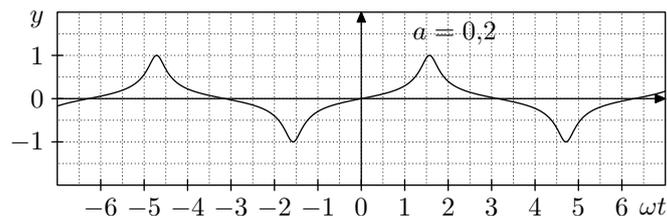
Abb. 2 Zeigerdiagramm für $a = 2$ Abb. 3 Zeigerdiagramm für $a = 10$

Auf der anderen Seite liefern Werte $0 \leq a < 1$ weitere Einblicke (Abbildungen 4 und 5). Der Grenzwert von (2) für $a \rightarrow 0^+$ ist

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} = 0$$

für $\omega t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$. An den Stellen $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ergeben sich die Grenzwerte

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a \sin \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)}} = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade,} \\ -1, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Abb. 4 Zeigerdiagramm für $a = 0,6$ Abb. 5 Zeigerdiagramm für $a = 0,2$

Mit anderen Worten wechselt die projizierte Schwingung kontinuierlich ihr Aussehen von einer im Grenzfall (bis auf an den abzählbar unendlich vielen Stellen $\omega t = \frac{\pi}{2} + n\pi$) verschwindenden Funktion $y(t) = 0$ bis hin zu einer Rechteckschwingung, wenn der Parameter a den Bereich von 0 bis ∞ überstreicht.

Diese periodischen Funktionen, welche den *Dirichletschen Bedingungen*² genügen, wollen wir nun der Fourieranalyse unterziehen und in eine Fourier-Reihe

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

²Eine Funktion erfüllt die Dirichletschen Bedingungen genau dann, wenn ihr Definitionsgebiet in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, auf denen die Funktion jeweils stetig und monoton ist und die Funktion in ihren höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen jeweils einen links- als auch rechtsseitigen Limes besitzt.

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt \quad (5)$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt \quad (6)$$

entwickeln (vgl. [3]). Dabei interessieren wir uns zunächst für die Oberschwingungen³, welche durch die Koeffizienten a_2, a_3, a_4, \dots und b_2, b_3, b_4, \dots amplitudenmäßig gedämpft werden.

2.1 Berechnung der Fourierkoeffizienten

Beginnen wir mit der Berechnung der Fourierkoeffizienten. Die Integrale in (5) verschwinden aufgrund der Punktsymmetrie des Integranden zum Ursprung, sobald Gleichung (2) eingesetzt wird. Das erkennt man besonders gut, wenn man als Integrationsintervall den Bereich von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ wählt. Eine äquivalente Sichtweise im Fall von a_0 ist der verschwindende Gleichspannungsanteil der Schwingung. Es folgt also $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$

Zur Berechnung der b_n setzen wir Gleichung (2) in Gleichung (6) ein und erhalten

$$b_n(a) = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} \cdot \sin n\omega t dt. \quad (7)$$

³Diese sind durch ihr Vorhandensein gewissermaßen für die „Versmierung“ des reinen Sinussignals verantwortlich.

Hier benötigen wir die Identität für Vielfache eines Winkels, nämlich

$$\sin nx = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \sin^{2j+1} x \cos^{n-2j-1} x.$$

Diese Beziehung eingesetzt in (7) liefert nach Umsortierung

$$\begin{aligned} b_n(a) &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{a \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} \cdot \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \sin^{2j+1} \omega t \cos^{n-2j-1} \omega t \right] dt \\ &= \frac{2a}{T} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \int_0^T \cos^{n-2j-1} \omega t \cdot \frac{\sin^{2j+2} \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Der Koeffizient b_0 folgt direkt aus (7) und es ist $b_0 = 0$. Für die restlichen b_n betrachten wir zuerst das allgemeine Integral

$$\int_0^{T/4} \frac{\sin^n \omega t \cdot \cos^m \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt \quad (9)$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$. Mit der im Intervall $[0, \frac{T}{4}]$ bijektiven Substitutionsfunktion $x(t) = \sin^2 \omega t$ überführen wir das Integral (9) mit $dx = 2\omega \sin \omega t \cos \omega t dt$ in

$$\frac{1}{2\omega} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)x}} dx. \quad (10)$$

Bei genauerer Betrachtung von (10) erkennt man die Übereinstimmung mit der Integralrepräsentation der *Gaußschen hypergeometrischen Funktion*⁴. Diese lautet in allgemeiner Form (siehe auch [2])

$$\int_{z_1}^{z_2} (t - z_1)^a (z_2 - t)^b (z_3 - t)^c dt = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \cdot (z_2 - z_1)^{a+b+1} (z_3 - z_1)^c \cdot {}_2F_1\left(a+1, -c; a+b+2; \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$$

mit $a > -1$, $b > -1$ und $|z_2 - z_1| < |z_3 - z_1|$. Setzen wir noch $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \frac{1}{x})$ ⁵ sowie $(a, b, c) = (\alpha - 1, \gamma - \alpha - 1, \gamma)$, so gelangen wir zur bekannten Form

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-xt)^{-\beta} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x). \quad (11)$$

Das Integral (11) existiert für $\gamma > \alpha > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei wir uns durch die Beschränkung $x \leq 1$ ⁶ auf reellwertige Integralwerte festlegen. Der Vergleich von (10) mit (11) kann nun zusammengefasst⁷ werden zu

$$\frac{1}{2\omega} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{1+(a^2-1)x}} dx = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+2}{2}\right)} \cdot {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n+m+2}{2}; 1-a^2\right),$$

⁴Die Gaußsche hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ ist definiert über die Reihe

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

und kann zum Beispiel numerisch ausgerechnet werden.

⁵Es genügt, wenn wir uns in diesem Rahmen auf das Reelle beschränken.

⁶Also insbesondere auch $x = 1 - a^2$.

⁷Hier ist anzumerken dass in unserem Fall wegen $\frac{m-1}{2} \geq -1$ und $m \in \mathbb{N}_0$ stets $\gamma > \alpha$ gilt.

wobei wir schlussendlich unter Verwendung der *Eulerschen Betafunktion* zu

$$\int_0^{T/4} \frac{\sin^n \omega t \cdot \cos^m \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt = \frac{1}{2\omega} \cdot B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n+m+2}{2}; 1-a^2\right) \quad (12)$$

gelangen. Die Beziehung (12) gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, unter den eingangs angegebenen Voraussetzungen sogar für alle $m, n \in \mathbb{R}^+$. Wie in (7) angegeben müssen wir die Integrale über eine vollständige Periode T und nicht über eine Viertelperiode $\frac{T}{4}$ berechnen. Auf diese Integration kann man aber verzichten und geschickter durch elementare geometrische Betrachtungen und Fallunterscheidungen hinsichtlich der Potenzen n und m zur Lösung gelangen. Betrachten wir dazu die Integrandenfunktion mit (o. B. d. A. sei $\omega = 1$, d. h. $T = 2\pi$)

$$f(x) = \frac{\sin^n x \cdot \cos^m x}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 x}}.$$

Sei nun

- n, m geradzahlig mit $n, m \in \mathbb{N}_0$. In Abbildung 6 ist die Situation beispielhaft für $n = 6$ und $m = 14$ gezeigt. Wir sehen nun, dass die Funktion π -periodisch ist (gepunktete senkrechte Linie) und – schneidet man z. B. eine solche Periode im Intervall $[0, 2\pi]$ heraus – die Funktion achsensymmetrisch zur Achse $x = \frac{\pi}{2}$ (gestrichelte senkrechte Linie) ist. Zum Nachweis der kleinsten Periode zeigen wir $f(x + \pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist⁸

$$f(x + \pi) = \frac{\sin^n(x + \pi) \cdot \cos^m(x + \pi)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2(x + \pi)}} = \frac{(-\sin x)^n \cdot (-\cos x)^m}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) (-\sin x)^2}} = \frac{\sin^n x \cdot \cos^m x}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 x}} = f(x).$$

⁸Bekanntlich ist $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Symmetrie zur Achse $x = \frac{\pi}{2}$ erkennt man mithilfe der Beziehungen $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, woraus

$$f(\pi - x) = \frac{\sin^n(\pi - x) \cdot \cos^m(\pi - x)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2(\pi - x)}} = \frac{\sin^n x \cdot (-\cos x)^m}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 x}} = \frac{\sin^n x \cdot \cos^m x}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 x}} = f(x)$$

folgt. Für unser Integral bedeutet dies

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\sin^n \omega t \cdot \cos^m \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt &= 4 \cdot \int_0^{T/4} \frac{\sin^n \omega t \cdot \cos^m \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt \\ &= \frac{2}{\omega} \cdot \text{B} \left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2} \right) \cdot {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{n+m+2}{2}; 1 - a^2 \right). \end{aligned}$$

Intuitiv einsichtig stellt sich diese Situation auch in Abbildung 6 dar. Man erkennt hier über eine volle Periode betrachtet schraffiert dargestellt vier Flächenstücke mit identischer Flächenmaßzahl.

- n geradzahlig, m ungeradzahlig mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ (siehe Abbildung 7). Hier argumentieren wir folgendermaßen: Es ist f im betrachteten Integrationsintervall $[0, 2\pi]$ achsensymmetrisch zur Achse bei $x = \pi$ (gestrichelte Linie), denn mit $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ und $\cos(2\pi - x) = \cos x$ ist

$$f(2\pi - x) = \frac{\sin^n(2\pi - x) \cdot \cos^m(2\pi - x)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2(2\pi - x)}} = \frac{(-\sin x)^n \cdot (\cos x)^m}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) (-\sin x)^2}} = \frac{\sin^n x \cdot \cos^m x}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 x}} = f(x).$$

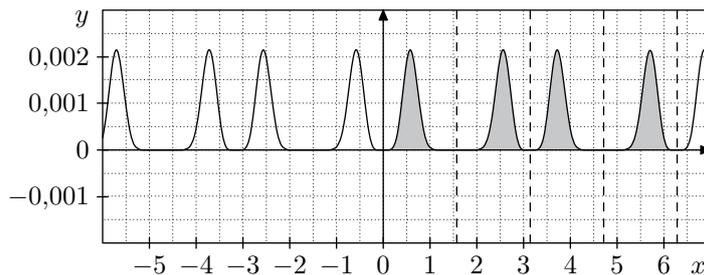


Abb. 6 Flächenorientierung für gerade n und gerade m
 $(n = 6, m = 14, a = \frac{\sqrt{5}}{2})$

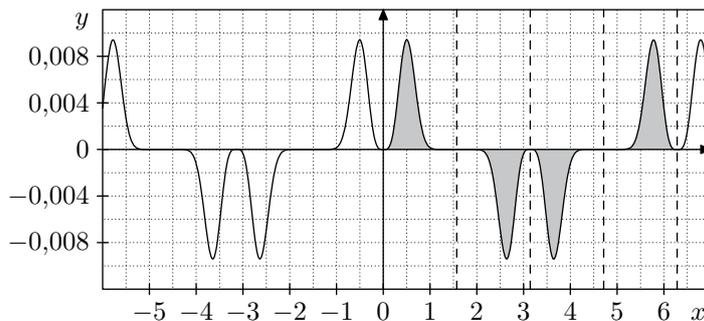


Abb. 7 Flächenorientierung für gerade n und ungerade m
 $(n = 4, m = 13, a = \frac{\sqrt{5}}{2})$

Weiter ist f im Intervall $[0, \pi]$ punktsymmetrisch zum Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$, wie man durch die Bedingung $f(x + \frac{\pi}{2}) - 0 = -f(\frac{\pi}{2} - x) + 0$ nachweist. Es ist

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sin^n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos^m\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\cos^n x \cdot (-\sin x)^m}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)\cos^2 x}} = -\frac{(-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right))^n \cdot (\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right))^m}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)(-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right))^2}} \\ &= -\frac{\sin^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos^m\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}} = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

In Abbildung 7 ist dieser Fall exemplarisch angedeutet. Somit können wir folgern, dass das Integral

$$\int_0^T \frac{\sin^n \omega t \cdot \cos^m \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)\sin^2 \omega t}} dt \quad (13)$$

identisch verschwindet.

- n, m ungeradzahlig mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ (siehe Abbildung 8). Hier zeigt man analog, dass f als kleinste Periode π enthält. Ebenso ist f im Intervall $[0, \pi]$ achsensymmetrisch zum Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$. In diesem Fall verschwindet das Integral (13) ebenso.
- n ungeradzahlig, m geradzahlig mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ (siehe Abbildung 9). Hier gilt $f(x + \pi) = f(x)$, ferner ist f punktsymmetrisch zum Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Auch in diesem Fall verschwindet das Integral (13).

Zusammenfassend stellen wir fest, dass nur geradzahlige Werte für n, m einen nicht verschwindenden Beitrag zum Integralwert liefern und dieser ist durch (12) gegeben. Damit können wir zur Gleichung (8) und zur Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n zurückkehren:

$$b_n(a) = \frac{2a}{T} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \int_0^T \frac{\sin^{2j+2} \omega t \cdot \cos^{n-2j-1} \omega t}{\sqrt{1 + (a-1)\sin^2 \omega t}} dt.$$

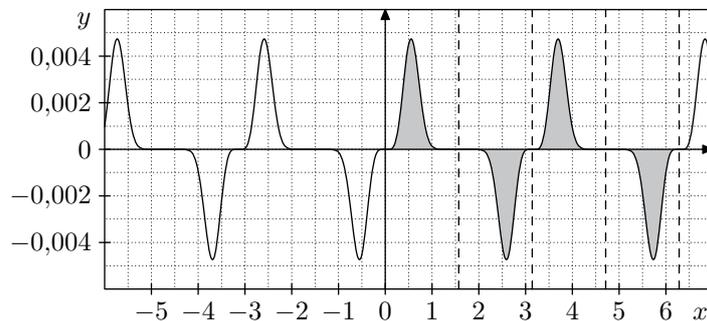


Abb. 8 Flächenorientierung für ungerade n und ungerade m
($n = 5, m = 13, a = \frac{\sqrt{5}}{2}$)

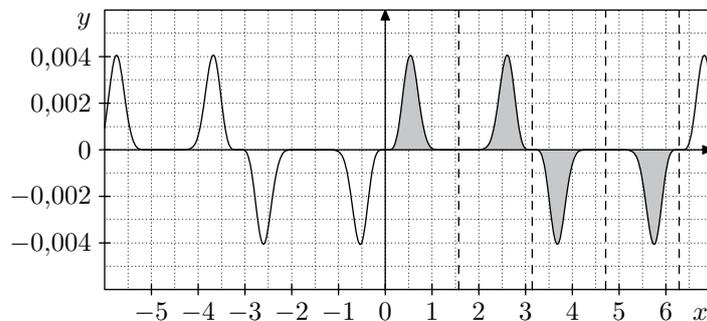


Abb. 9 Flächenorientierung für ungerade n und gerade m
($n = 5, m = 14, a = \frac{\sqrt{5}}{2}$)

Das Integrand enthält offensichtlich nur geradzahlige Potenzen bei den Sinustermen, demzufolge liefert das Integral bei den Kosinustermen nur dann von Null verschiedene Beiträge, wenn dessen Potenz $n - 2j - 1$ ebenfalls geradzahlig ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn $n = 2n' + 1$ ($n' = 0, 1, 2, 3, \dots$) ungeradzahlig ist, denn dies generiert die Zahlenfolge $(2(n' - j))_{j \in \{0, 1, \dots, n'\}}$, wobei jedes Folgenglied geradzahlig ist. Andernfalls ergibt $n = 2n'$ (geradzahlig) ($n' = 1, 2, 3, \dots$) die Folge $(2n' - 2j - 1)_{j \in \{0, 1, \dots, n'-1\}}$, d. h., jedes Folgenglied ist ungeradzahlig. Dies bedeutet somit $b_n = 0$ für $n = 2n'$ geradzahlig und

$$\begin{aligned}
 b_n(a) &= \frac{2a}{T} \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{2n'+1}{2j+1} \int_0^T \frac{\sin^{2(j+1)} \omega t \cdot \cos^{2(n'-j)} \omega t}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \sin^2 \omega t}} dt \\
 &= \frac{2a}{\pi} \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{2n'+1}{2j+1} \cdot B\left(\frac{2(j+1)+1}{2}, \frac{2(n'-j)+1}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(\frac{2(j+1)+1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{2(j+1)+2(n'-j)+2}{2}; 1-a^2\right) \\
 &= \frac{2a}{\pi} \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \binom{2n'+1}{2j+1} \cdot B\left(j + \frac{3}{2}, n' - j + \frac{1}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(j + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; n' + 2; 1-a^2\right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

für $n = 2n' + 1$ ungeradzahlig. Nun bringen wir Gleichung (14) noch in eine andere Form. Dazu verwenden wir die Beziehung

$$\binom{x}{y} = \frac{1}{(x+1) \cdot B(x-y+1, y+1)} \tag{15}$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und formen diese um zu⁹

$$b_n(a) = \frac{2}{\pi(n'+1)} \cdot \sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \cdot \frac{\binom{2n'+1}{2j+1}}{\binom{n'}{j+\frac{1}{2}}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n' - j + \frac{1}{2}; n' + 2; \frac{a^2 - 1}{a^2}\right).$$

⁹ Vgl. [1] – es ist $a \cdot {}_2F_1\left(a', \frac{1}{2}; c; 1-a^2\right) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, c-a'; c; \frac{a^2-1}{a^2}\right)$.

2.2 Oberschwingungen im Fall $a \geq 1$

Die Fourierkoeffizienten der Rechteckschwingung, wie sie im Grenzfall $a \rightarrow \infty$ erreicht wird, sind bekanntlich gegeben durch $a_n = 0$ sowie

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n \cdot \pi}, & \text{falls } n \text{ ungeradzahlig,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das nehmen wir zum Anlass, den rechtecknormierten Fourierkoeffizienten

$$\check{b}_n = \frac{n\pi}{4} b_n$$

einzuführen. Das lässt sich durch einen Blick in die Herleitung der b_n genauer begründen, denn es entsteht in der Rechnung ein Faktor $\frac{4/\pi}{2n'+1}$ vor der Summe, der automatisch den Fourierkoeffizienten einer idealen Rechteckfunktion entspricht. Der rechtecknormierte Fourierkoeffizient gibt also an, um welchen Faktor das betrachtete Amplitudenspektrum des jeweiligen Zeigermodells (mit dem Wert a) von dem Amplitudenspektrum der idealen Rechteckschwingung abweicht. Diesen Grad der „Versmierung“ wollen wir im nächsten Abschnitt etwas näher beleuchten.

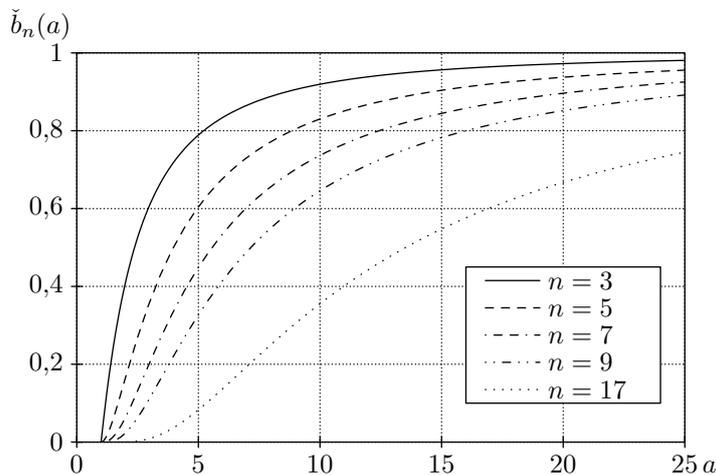
Interpretation der rechtecknormierten Fourierkoeffizienten \check{b}_n

Hier soll uns Abbildung 10 weiterhelfen. Es sind die Koeffizienten

$$\check{b}_n(a) \quad \text{mit } n = 3, 5, 7, 9, 17$$

über $1 \leq a \leq 25$ aufgetragen. Wir können Folgendes feststellen:

1. Die Koeffizienten $\check{b}_3, \check{b}_5, \check{b}_7, \check{b}_9$ und \check{b}_{17} verschwinden für $a = 1$, was plausibel erscheint, da dies ja einer reinen Sinusschwingung entspricht (vgl. (3)) und diese bekanntlich oberwellenfrei ist. Also ist $\check{b}_n(1) = 0$.

Abb. 10 Illustration der $\check{b}_n(a)$ mit $a \geq 1$

2. Es ist

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \check{b}_n(a) = 1.$$

Der Beweis sei dem geeigneten Leser überlassen.¹⁰

3. Offensichtlich ist, dass $\check{b}_n(a)$ streng monoton steigt. Demnach sind alle \check{b}_n nicht-negativ.

¹⁰Tipp:

$$\sum_{j=0}^{n'} (-1)^j \cdot \frac{\Gamma(n'+2)}{\Gamma(j+\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(n'-j+1)} = \frac{2(n'+1)}{(2n'+1)\sqrt{\pi}}.$$

Obige Überlegungen rechtfertigen das eingeführte Maß $\tilde{b}_n : [1, \infty) \rightarrow [0, 1)$. Kleine Werte von \tilde{b}_n signalisieren nur kleinere Verschmierungen des Amplitudenspektrums (bezogen auf eine reine Sinusschwingung), wohingegen Werte nahe bei 1 größere Verschmierungen (Amplitudenspektren nahe der Rechteckfunktion) andeuten. In Abbildung 10 ist auch festzustellen, dass die Amplitude der Oberwellen mit steigendem n bei festgehaltenem a immer weiter abnimmt, d. h., gerade die ersten Oberwellen entscheiden in hohem Maße die Signalform. Dies gilt besonders für niedrige Werte von a (d. h. sinusähnliche Projektionen) und wird immer unbedeutender, je mehr sich die Zeigermodellprojektion einer Rechteckschwingung annähert ($a \rightarrow \infty$).

2.3 Oberschwingungen im Fall $0 < a \leq 1$

Ähnliche Überlegungen wie im vorigen Abschnitt führen uns auch hier auf ein Maß – allerdings betrachten wir hier die Fourierkoeffizienten nicht relativ zu einer Rechteckfunktion, sondern zur Sinusschwingung mit verschwindenden Oberwellen. Die Abweichung zur Sinusfunktion führen wir mit dem Maß des sinusnormierten Fourierkoeffizienten $\tilde{b}_n = |b_n|$ ein.

Interpretation der sinusnormierten Fourierkoeffizienten \tilde{b}_n

Wir betrachten Abbildung 11. In diesem Fall sind die Koeffizienten

$$\tilde{b}_n(a) \quad \text{mit} \quad n = 3, 5, 7, 9, 17$$

über $0 < a \leq 1$ aufgetragen. Wir halten fest:

1. Die Koeffizienten $\tilde{b}_3, \tilde{b}_5, \tilde{b}_7, \tilde{b}_9$ und \tilde{b}_{17} verschwinden erneut für $a = 1$, also ist $\tilde{b}_n(1) = 0$.
2. Es ist

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{b}_n(a) = 0.$$

Auch hier sei der Beweis dem geeigneten Leser überlassen, sicherlich ist dabei ein Blick in die detaillierte Herleitung in Abschnitt 2.1 dienlich.

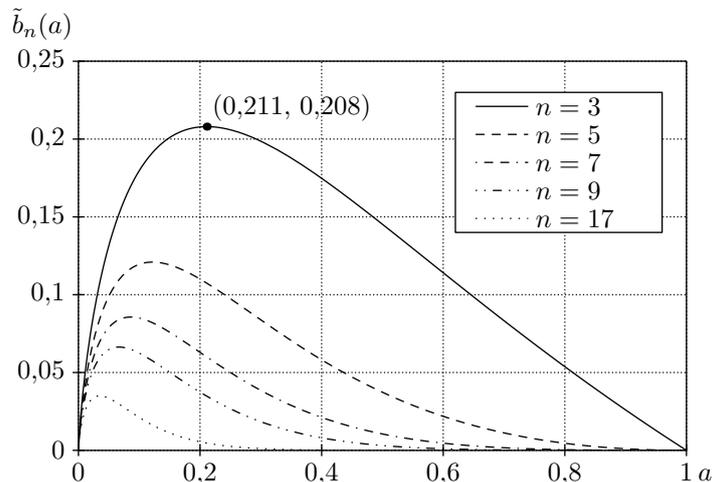


Abb. 11 Illustration der $\tilde{b}_n(a)$ mit $0 < a \leq 1$

3. Man erkennt in den eingezeichneten Fällen im Bereich $0 < a \leq 1$ lokale Maxima für \tilde{b}_n . Wir wollen dies nun näher für \tilde{b}_3 untersuchen und setzen $n' = 1$ ein:

$$\tilde{b}_3(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=0}^1 (-1)^j \cdot \frac{\binom{3}{2j+1}}{\binom{1}{j+\frac{1}{2}}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-j+\frac{1}{2}; 3; \frac{a^2-1}{a^2}\right).$$

In Abbildung 11 ist ein lokales Maximum im Bereich um die Stelle bei $a = 0,211$ eingezeichnet. Diesen Wert wollen wir noch numerisch untermauern. Dazu bilden wir die Ableitung $\frac{d\tilde{b}_3}{da}$ und setzen diese gleich Null, d. h.

$$\frac{d\tilde{b}_3(a)}{da} = 9 \cdot \frac{d\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)}{da} \cdot \left[3 \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 4; \frac{a^2-1}{a^2}\right) - {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 4; \frac{a^2-1}{a^2}\right) \right] = 0. \quad (16)$$

Die linke Seite von (16) verschwindet genau dann¹¹, wenn die Differenz

$$3 \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 4; \frac{a^2 - 1}{a^2}\right) - {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 4; \frac{a^2 - 1}{a^2}\right)$$

verschwindet. Als numerische Lösung findet man

$$\frac{a^{*2} - 1}{a^{*2}} \approx -21,4213506835409,$$

d. h. $a^* \approx 0,211$. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die erste Oberwelle¹² des Signals

$$y_{a^*}(t) = \frac{a^* \sin \omega t}{\sqrt{1 + (a^{*2} - 1) \sin^2 \omega t}}$$

den größten amplitudenmäßigen Beitrag unter allen Werten $0 \leq a \leq 1$ besitzt.

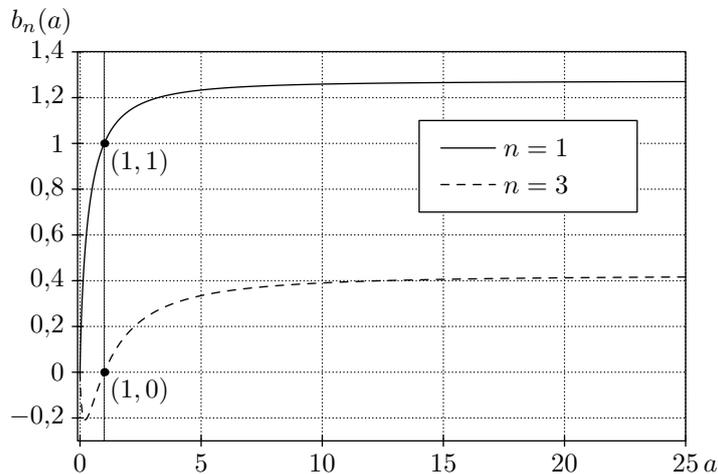
4. Die Stellen der lokalen Maxima verschieben sich für fallende Werte von a immer weiter in Richtung $a^* = 0$.

2.4 Grundschwingung im Fall $0 < a < \infty$

Bisher war unser Augenmerk auf die Berechnung der Oberschwingungen (d. h. mit $n = 3, 5, 7, \dots$) der Fourierkoeffizienten gerichtet. Wir wollen nun noch das Amplitudenspektrum der Grundschwingung b_1 untersuchen. Die entsprechende Kurve ist in Abbildung 12 gezeigt (zur besseren Orientierung ist auch das Spektrum der ersten Oberschwingung b_3 eingezeichnet). Die senkrechte Linie trennt die Kurve in die beiden zuvor behandelten Fälle (siehe Abschnitt 2.2 (rechter Bereich) und 2.3 (linker Bereich)). Der amplitudenmäßige Anteil der Grundschwingung erhöht sich mit steigenden Werten von a , d. h., b_1 steigt streng monoton.

¹¹Es ist $\frac{a^2-1}{a^2}$ streng monoton steigend im Intervall $(0, 1)$.

¹²Hier wegen $b_2 = 0$ durch den Koeffizienten b_3 repräsentiert.

Abb. 12 Illustration der $b_1(a)$ und $b_3(a)$

3 Zusammenfassung

Wir haben in den letzten Kapiteln untersucht, inwieweit das Amplitudenspektrum des Signals (2) – verursacht durch imperfekte sinusförmige Zeigermodellprojektion – bei Variation des Parameters a verschmiert. Dabei hatten wir die Fallunterscheidung $a \geq 1$ (Abschnitt 2.2) sowie $0 < a \leq 1$ (Abschnitt 2.3) getroffen und das resultierende Oberwellenspektrum jeweils mit einem geeigneten Maß (Grad der „Verschmierung“) verglichen. Im ersten Fall wurde als Referenzspektrum jenes einer idealen Rechteckschwingung, im zweiten Fall das einer reinen Sinusschwingung verwendet. In beiden Fällen konnten wir schließlich integralfreie Ausdrücke dafür angeben. Darüber hinaus hatten wir auch das Spektrum der Grundschwingung als Besonderheit betrachtet. Im Rahmen der Untersuchungen sind wir dabei auf einige interessante Spezialfälle gestoßen.

Literatur

- [1] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 6th edition, 2000.
- [2] Toshio Oshima: *An elementary approach to the Gauss hypergeometric function*. Josai Mathematical Monographs 6, S. 3–23, 2013.
- [3] Lothar Papula: *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg+Teubner Verlag, 10. Auflage, 2009.