Konvergenzverbesserung und komplexe Integrale

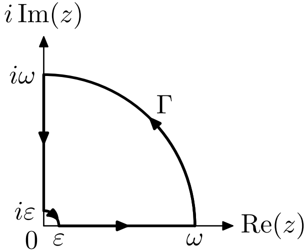
von Friedhelm Götze, Jena

Vor kurzem erschien ein Artikel über den Residuensatz [1] in der √WURZEL, in dem schon einige Beispiele, die seinen Nutzen deutlich machen, gegeben wurden. Eine weitere Anwendung zur numerischen Berechnung von Integralen sowie zwei Alternativlösungen zu früheren √WURZEL-Aufgaben sollen hier dargestellt werden.

Für die Berechnung uneigentlicher Integrale mit extrem schlechter Konvergenz sind die gängigen Quadraturformeln[1] wenig geeignet. Eine Verlagerung in die komplexe Analysis kann aber hilfreich sein, da sich oft mit den dort beschriebenen Methoden (Residuensatz u. Ä.) die Konvergenz so verbessern lässt, dass eine numerische Auswertung überhaupt erst möglich wird. Für Integrale mit diesen für die Berechnung ungünstigen Eigenschaften demonstrieren wir stellvertretend das Vorgehen am Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cos\frac{1}{x}\, dx = \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx\,.$$

Erstreckt über den geschlossenen Weg Γ (siehe Skizze) betrachte man in der komplexen Ebene das Umlaufintegral



$$I := \oint_\Gamma \frac{e^{-z}}{z}\, dz\,.$$

Nach dem Residuensatz hat I den Wert 0, da der Integrand in dem von Γ berandeten Gebiet regulär ist. Man erhält

$$\int_\varepsilon^\omega \frac{e^{-x}}{x}\, dx + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega e^{i\varphi}}\, d\varphi + \int_\omega^\varepsilon \frac{e^{-ix}}{x}\, dx + i\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi = 0\,,$$

also

$$\int_\varepsilon^\omega \frac{e^{-x} - e^{-ix}}{x}\, dx = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\varepsilon e^{i\varphi}} - e^{-\omega e^{i\varphi}}\right) d\varphi$$

[1] Methoden zur numerischen Integration

und weiter wegen des hier erlaubten Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ix}}{x}\,dx = i\frac{\pi}{2}$$

bzw. durch Vergleich von Real- und Imaginärteil

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - \cos(-x)}{x}\,dx = 0\,, \qquad \int_0^\infty \frac{-\sin(-x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Uns interessiert das erste Integral, das wie folgt umgeformt wird:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x} - \cos x}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$$

und daraus

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x}\,dx - \left(\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\right). \tag{1}$$

Der eingeklammerte Teil ist eine bekannte Darstellung für die Eulersche Konstante[2] γ, die sich in dieser Form relativ gut berechnen lässt. Man hat z. B.

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = 0,7965995993\ldots$$

und mit numerischem Quadraturverfahren

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = 0,2193839344\ldots$$

[2] Meist wird γ durch den Grenzwert $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$ definiert.

Damit ergibt sich

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = 0,5772156649\ldots$$

Beim verbliebenen Integral rechts in (1) empfiehlt sich wieder eine Reihendarstellung:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n\cdot(2n)!} = 0,2398117420\ldots$$

Man erhält schließlich für (1) nach der Substitution $x \to \frac{1}{x}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n\cdot(2n)!} - \gamma = -0,3374039229\ldots \tag{2}$$

in Übereinstimmung mit dem Wert $-\mathrm{Ci}(1)$ des bekannten „Integralcosinus“

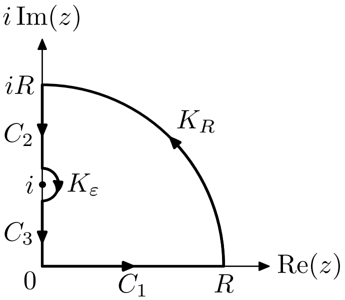
$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x>0)\,.$$

Die mit hoher Stellenzahl bekannte Eulersche Konstante γ und die schnelle Konvergenz der Reihe ermöglichen so eine hinreichend genaue Berechnung des nur bedingt konvergenten Integrals (2).

o 11 – Benjamin Scharf, Jena
Man zeige $$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{e^{-t\pi}}{1+t^2}\, dt\,.$$

In der komplexen Ebene integriere man die Funktion $f(z) = \frac{e^{-\pi z}}{1+z^2}$ längs des skizzierten Weges

$$C_1 \cup K_R \cup C_2 \cup K_\varepsilon \cup C_3\,. \tag{3}$$



Dabei seien K_R und K_ε Kreisbögen mit den Radien R bzw. ε, wobei R hinreichend groß und ε hinreichend klein ist. Wie man sieht, liegt die Polstelle $z = i$ außerhalb des Gebiets, das von C umschlossen wird. So gilt nach dem Residuensatz für die Summe der an die Teilabschnitte aus (3) angepassten fünf Integrale

$$I_1 + I_R + I_2 + I_\varepsilon + I_3 = \oint_C f(z)\, dz = 0\,. \tag{4}$$

I_1: Das ist eines der beiden Integrale, die wir am Ende erhalten wollen:

$$I_1 = \int_0^R f(x)\, dx \quad\Longrightarrow\quad \lim_{R\to\infty} I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-\pi x}}{1+x^2}\, dx\,.$$

I_R: Mit $z = Re^{i\varphi}$ bekommt man

$$|I_R| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\pi R e^{i\varphi}}}{1+R^2e^{2i\varphi}} iRe^{i\varphi}\, d\varphi \right| \le \frac{R}{R^2-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\cos\varphi}\, d\varphi \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

also ist $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = 0$.

I_ε: Setze $z = i + \varepsilon e^{i\varphi}$. Dann ist

$$I_\varepsilon = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\pi i - \pi\varepsilon e^{i\varphi}}}{1 + (i + \varepsilon e^{i\varphi})^2}\, i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\pi\varepsilon e^{i\varphi}}}{2 - i\varepsilon e^{i\varphi}}\, d\varphi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{\pi}{2}\,,$$

d. h. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

I_2, I_3: Mit $z = iy$ ($R \geq y \geq 1+\varepsilon$ bei I_2; $1-\varepsilon \geq y \geq 0$ bei I_3) gilt

$$I_2 + I_3 = \frac{i}{2}\left(\int_R^{1+\varepsilon} \frac{e^{-\pi iy}}{1+y}\, dy + \int_R^{1+\varepsilon} \frac{e^{-\pi iy}}{1-y}\, dy\right) + \frac{i}{2}\left(\int_{1-\varepsilon}^{0} \frac{e^{-\pi iy}}{1+y}\, dy + \int_{1-\varepsilon}^{0} \frac{e^{-\pi iy}}{1-y}\, dy\right).$$

Von links beginnend substituiere man der Reihe nach $y = t-1$, $y = t+1$, $y = t-1$ und $y = t+1$. So ist dann

$$I_2 + I_3 = \frac{i}{2}\left(\int_{2+\varepsilon}^{R+1} \frac{e^{-\pi it}}{t}\, dt - \int_{\varepsilon}^{R-1} \frac{e^{-\pi it}}{t}\, dt + \int_{1}^{2-\varepsilon} \frac{e^{-\pi it}}{t}\, dt + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{\pi it}}{t}\, dt\right).$$

Nach Zerlegung des zweiten Integrals entsprechend $[\varepsilon, R-1] = [\varepsilon, 1] \cup [1, R-1]$ ergibt sich

$$I_2 + I_3 = \frac{i}{2}\left(\int_1^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^{R+1} - \int_1^{R-1}\right) \frac{e^{-\pi it}}{t}\, dt + \frac{i}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{\pi it} - e^{-\pi it}}{t}\, dt\,.$$

Für $\varepsilon \to 0$ lassen sich die ersten drei Integrale zusammenfassen. Man erhält

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_2 + I_3) = \frac{i}{2}\int_{R-1}^{R+1} \frac{e^{-\pi it}}{t}\, dt - \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\, dt$$

und weiter mittels der Substitutionen $t = x + R$ bzw. $t = \frac{x}{\pi}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(I_2 + I_3) = \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\pi i(x+R)}}{x+R}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Offenbar gilt hier

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} (I_2 + I_3) = -\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Mit den obigen Ergebnissen folgt jetzt aus (4)

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_0^\infty \frac{e^{-\pi x}}{1+x^2}\, dx = 0\,.$$

***o* 38** – Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

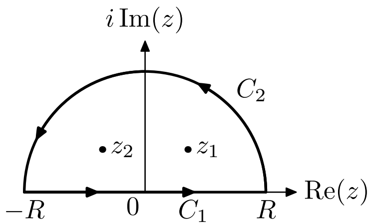
Man beweise
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Wie in der im $\sqrt{\text{WURZEL}}$-Heft 3+4/2009 veröffentlichten Lösung gezeigt, bestätigt man mit der Substitution $x = \frac{\pi}{2} - t$ die Äquivalenz der beiden Integrale. Des Weiteren liefert die Substitution $\sqrt{\tan x} = t$ die Gleichheit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{t^4+1}\, dt\,.$$

Nun betrachte man in der komplexen Ebene das Umlaufintegral

$$\int_C f(z)\, dz \quad \text{mit} \quad f(z) = \frac{2}{z^4+1}\,,$$



wobei $C = C_1 \cup C_2$ für $R \gg 1$ aus den zwei skizzierten Wegen $C_1 = \{x : -R \le x \le R\}$ und $C_2 = \{z = Re^{i\varphi} : 0 \le \varphi \le \pi\}$ besteht. Es gilt dann

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^4+1}\, dx\,, \tag{5}$$

$$\int_{C_2} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} \frac{2}{(Re^{i\varphi})^4+1} Rie^{i\varphi}\, d\varphi \xrightarrow{R\to\infty} 0\,. \tag{6}$$

Nun hat $f(z)$ im Innern des geschlossenen Weges C zwei Polstellen $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Nach dem Residuensatz gilt hierfür

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2)\right). \tag{7}$$

Da die Polstellen einfach sind, lassen sich die Residuen wie folgt berechnen:

$$\operatorname{Res}(f; z_k) f(z) = \left[\frac{2}{\frac{d}{dz}(z^4+1)}\right]_{z=z_k}.$$

So wird dann aus (7)

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= 2\pi i \left(\frac{2}{4z_1^3} + \frac{2}{4z_2^3}\right) = \pi i \left(e^{\frac{-3\pi i}{4}} + e^{\frac{-9\pi i}{4}}\right) \\ &= \pi i \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

und man erhält für $R \to \infty$ in Verbindung mit (5) und (6) das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \pi\sqrt{2}, \quad \text{also} \quad \int_0^{\infty} \frac{2}{x^4+1}\ dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Literatur

[1] Gockel, Wally: *Der Residuensatz.* $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 5/2011.