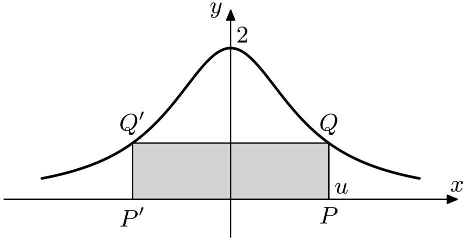
Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 7



In der Abbildung sind der Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

und ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck $PQQ'P'$ dargestellt. Es ist $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$. Für welches u ist der Flächeninhalt des Rechtecks maximal oder minimal?

Lösung

Erst berechnen wir den Flächeninhalt $A(u)$ des Rechtecks in Abhängigkeit von u, anschließend bilden wir die erste Ableitung:

$$\begin{aligned} A(u) &= \overline{PP'} \cdot \overline{PQ} = 2u \cdot f(u) = 2u \cdot \frac{2}{u^2+1} \\ \Rightarrow \qquad A(u) &= \frac{4u}{u^2+1} \\ A'(u) &= \frac{4-4u^2}{(u^2+1)^2}\,. \end{aligned}$$

Der folgenden Tabelle, die die Vorzeichen von $A(u)$ und $A'(u)$ verdeutlicht, kann man entnehmen, dass $A_{\max} = A(1) = 2$ und $A_{\min} = A(-1) = -2$ ist.

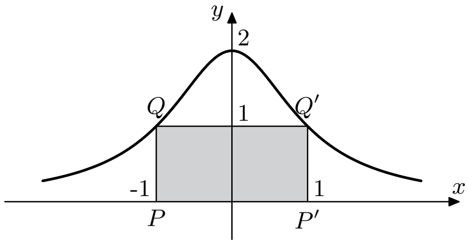
u		-1		1	
$A'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$A(u)$	fallend	-2	steigend	2	fallend

Wir müssen noch berücksichtigen, dass der Flächeninhalt nicht negativ sein kann. Deshalb müssen wir den Wert $u = -1$ verwerfen.

Antwort: Für $u = 1$ wird der Flächeninhalt maximal.

Bemerkung

1. Wenn $u = 1$, dann ist $f(u) = f(1) = 1$. Das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt hat die Länge 2 und die Breite 1.
2. Der Wert $u = -1$ ergibt $P'(1|0)$ (siehe Abbildung unten). Das Rechteck $P'Q'QP$ ist aber gerade das obige Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt. Das heißt, für $u = -1$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks auch maximal.



Die Lösung und die Bemerkung stellen einen Widerspruch dar.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?