Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 6

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für jedes x aus I und ist eine reelle Zahl. Es sei $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$.

Untersuche, ob die Funktion f stetig ist!

Anmerkung: Zum besseren Verständnis geben wir ein Beispiel an. Für $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$ und $I = (0, \infty)$ hätten wir

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{n}} = \frac{1}{x+0} = \frac{1}{x},$$

d. h. $f(x) = \frac{1}{x}$.

Lösung

Wir legen ein beliebiges x_0 aus dem Intervall I fest und zeigen, dass f an der Stelle x_0 stetig ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{3} > 0$. Im Folgenden arbeiten wir mit dieser streng positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{3}$. Mit $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\,. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es, da ja $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für jedes } n > n_1\,. \tag{1}$$

Da f_n stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für jedes x mit $|x - x_0| < \delta$ und $x \in I$. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ folgt noch, dass es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für jedes } n > n_2 \,. \tag{2}$$

Jetzt setzen wir $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Für $n > n_0$ ist sowohl (1) als auch (2) gültig. Es folgt durch Einsetzen

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.$$

Damit ist bewiesen, dass f an der Stelle x_0 stetig ist. Da x_0 eine beliebige Zahl aus dem Intervall I war, ist die Funktion f stetig.

Bemerkung

Hilfssatz: Für $0 < x < 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

Beweis: Betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = x^n$. Für diese Folge gilt

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad x^{n+1} < x^n \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \,.$$

Daraus folgt, dass (a_n) monoton fallend ist. Wegen $0 < x < 1$ ist $0 < x^n < 1$ und damit ist die Folge (a_n) beschränkt. Das heißt, die Folge (a_n) ist konvergent. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Andererseits ist $a_{n+1} = x \cdot a_n$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad g = xg \quad \Rightarrow \quad g = 0 \,.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Betrachten wir nun das Beispiel $I = (0,1]$ und $f_n(x) = x^n$. f_n ist stetig für jedes n (Potenzfunktion). Laut Hilfssatz ist $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für jedes $x \in (0,1)$. Aber $f(1) = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Dies bedeutet, dass f an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig ist.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?