Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 7

Ermittle das Maximum der Funktion

$$f(x) = (1 + \sin x)(5 - \sin x)\,. \tag{1}$$

1. Lösungsweg

Es sei $\sin x = u$. Wir erhalten

$$f(x) = g(u) = (1 + u)(5 - u) = -u^2 + 4u + 5 = -(u - 2)^2 + 9\,.$$

Aus der Scheitelpunktsform lässt sich das Maximum ablesen: $f_{\max} = 9$.
Antwort: Das Maximum von $f(x)$ ist 9.

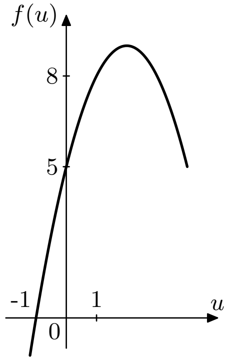
2. Lösungsweg

Es sei $g(x) = 1 + \sin x$ und $h(x) = 5 - \sin x$. Dann ist $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ gilt

$$g_{\min} = 0, \quad g_{\max} = 2, \quad h_{\min} = 4 \quad \text{und} \quad h_{\max} = 6\,.$$

Somit ist $f_{\min} = g_{\min} \cdot h_{\min} = 0 \cdot 4 = 0$ bzw. $f_{\max} = g_{\max} \cdot h_{\max} = 2 \cdot 6 = 12$.
Antwort: Das Maximum von $f(x)$ ist 12.

3. Lösungsweg



Es sei wieder $\sin x = u$. Wir erhalten

$$f(x) = g(u) = (1+u)(5-u) = -u^2 + 4u + 5\,.$$

Es gilt wieder $-1 \leq \sin x \leq 1$ und daher $-1 \leq u \leq 1$. Das Schaubild ist im Bereich $-1 \leq u \leq 1$ monoton steigend und somit folgt

$$f_{\min} = g(-1) = 0 \quad bzw. \quad f_{\max} = g(1) = 8\,.$$

Antwort: Das Maximum von $f(x)$ ist 8.

4. Lösungsweg

Wir wenden folgenden bekannten Satz an:

„Wenn die Summe zweier Parameter a und b konstant ist, dann ist dessen Produkt $a \cdot b$ für $a = b$ maximal.“

$$a = b \quad \Rightarrow \quad 1 + \sin x = 5 - \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = 2$$

Diese letzte Gleichung hat aber keine Lösung, denn $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Antwort: Es gibt kein Maximum.

Die Lösungswege haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?