

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 1

In einen gegebenen Kreis werden Sehnen eingezeichnet. Dadurch wird die Kreisscheibe in mehrere Bereiche zerlegt. Wir sollen diese Bereiche so färben, dass benachbarte Gebiete verschieden gefärbt sind.

Wie viele Farben benötigen wir mindestens?

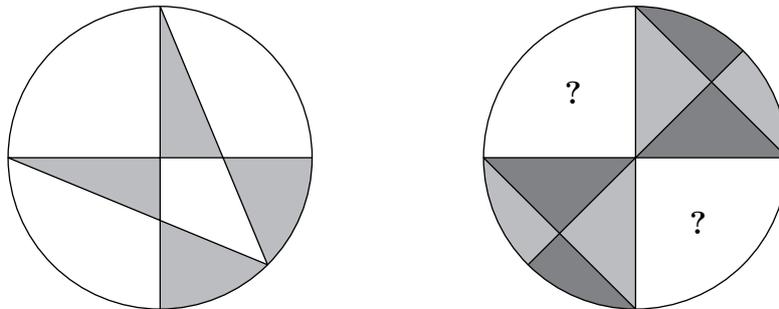
1. *Anmerkung:* Zwei Bereiche, die nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben, gelten *nicht* als benachbart.

2. *Anmerkung:* Die gesuchte Anzahl von Farben sollte ermöglichen, dass eine beliebige Zerlegung der Kreisscheibe – durch *endlich* viele Sehnen – wie verlangt gefärbt werden kann.

1. Lösungsweg

Zuerst färben wir alle Bereiche, die nur einen gemeinsamen Punkt haben, mit derselben Farbe. Dadurch wird die Anzahl der benötigten Farben geringer, als wenn wir zwei solche Bereiche mit zwei unterschiedlichen Farben färben würden.

Benachbarte Bereiche, die also mehr als einen gemeinsamen Punkt haben, färben wir nun mit einer anderen Farbe. So könnten eventuell schon zwei Farben reichen (siehe linke Skizze), aber nicht in jedem Fall (siehe rechte Skizze).



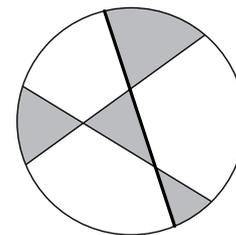
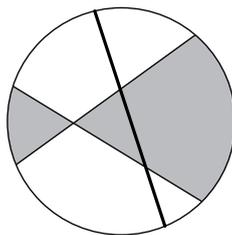
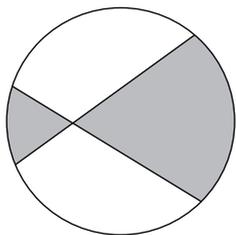
Daraus folgt:

Antwort: Wir benötigen drei Farben.

2. Lösungsweg

Wir gehen schrittweise vor. Zuerst zeichnen wir eine einzige Sehne. Für die zwei entstandenen Bereiche brauchen wir zwei Farben.

Jetzt kommt die nächste Sehne. Die entstandenen neuen Bereiche werden passend gefärbt (siehe linke Skizze). Wie dieses Verfahren nun genauer abläuft, schildern wir am Beispiel der mittleren Skizze. Neu ist hier die fett eingezeichnete Sehne. Auf einer Seite dieser Sehne (in diesem Fall links) bleiben die Farben unverändert. Auf der anderen Seite (in diesem Fall rechts) werden die zwei Farben vertauscht (siehe rechte Skizze). Damit sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.



Antwort: Wir benötigen zwei Farben.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?