Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 4

Es sei $x_1 = 2,99$ und $x_{n+1} = \sqrt{5,999x_n - 8,997}$. Untersuche die Folge auf Monotonie sowie Beschränktheit und ermittle gegebenfalls den Grenzwert!

Lösungsweg

Monotonie: $x_2 = \sqrt{5,999 \cdot 2,99 - 8,997} \approx 2,9899$. Wir stellen fest, dass $x_2 < x_1$ gilt. Vermutung: Die Folge ist monoton fallend. Beweis durch vollständige Induktion, $A(n) : x_{n+1} < x_n$.

I. Induktionsanfang $n = 1$: $x_2 < x_1$ stimmt, siehe oben.

II. Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &< x_{n+1} \\
\sqrt{5,999x_{n+1} - 8,997} &< \sqrt{5,999x_n - 8,997} \quad |()^2 \\
5,999x_{n+1} - 8,997 &< 5,999x_n - 8,997 \\
5,999x_{n+1} &< 5,999x_n \\
x_{n+1} &< x_n
\end{aligned}
$$

Dies stimmt laut $A(n)$. Daraus folgt, dass die Folge monoton fallend ist.

Beschränktheit: Eine obere Schranke ist $S = x_1 = 2,99$ wegen der Monotonie. Andererseits ist eine untere Schranke $s = 0$, denn das Ergebnis einer Quadratwurzel ist eine positive Zahl. Somit gilt $0 \leq x_n \leq 2,99$ für jedes n. Daraus folgt, dass die Folge ist beschränkt.

Aus der Monotonie und der Beschränktheit folgt, dass die Folge konvergent ist.

Grenzwertberechnung: Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$,

$$x_{n+1} = \sqrt{5,999x_n - 8,997}\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt

$$g = \sqrt{5,999g - 8,997}\,.$$

Durch Quadrieren erhalten wir

$$g^2 = 5,999g - 8,997 \quad \text{oder} \quad g^2 - 5,999g + 8,997 = 0\,.$$

Diese quadratische Gleichung hat als Lösung $g_1 = 2,999$ und $g_2 = 3$.

Bemerkung

Es ist $x_1 = 2,99$ kleiner als $2,999$ und die Folge ist monoton fallend. Dies bedeutet: Die Folge kann weder gegen $2,999$ noch gegen 3 konvergieren.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?