Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 6

Es sei $f(x) = \frac{3}{x}$ und $g_m(x) = mx + 3$. Ermittle den Parameter m so, dass die Gerade mit dem Schaubild von f genau einen gemeinsamen Punkt hat.

1. Lösungsweg

Durch Gleichsetzen folgt:

$$\frac{3}{x} = mx + 3$$
$$mx^2 + 3x - 3 = 0.$$

Es gibt genau dann genau einen gemeinsamen Punkt, wenn die Diskriminante Null ist:

$$(-3)^2 - 4 \cdot m \cdot (-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + 12m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{4}\,.$$

Antwort: Es ist $m = -\frac{3}{4}$. **(I)**

2. Lösungsweg

$$\text{Aus } f'(x) = g_m'(x) \text{ folgt } -\frac{3}{x^2} = m. \tag{1}$$

$$\text{Aus } f(x) = g_m(x) \text{ folgt } \frac{3}{x} = mx + 3. \tag{2}$$

Gleichung (1) in (2) eingesetzt ergibt $\frac{3}{x} = -\frac{3}{x^2} \cdot x + 3 \Rightarrow 1 = -1 + x \Rightarrow x = 2$.
Damit ist $y = f(2) = \frac{3}{2} = 1{,}5$ bzw. der Schnittpunkt ist $S(2|1{,}5)$. Mit der Punktprobe in der Gerade folgt: $\frac{3}{2} = 2m + 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$.
Antwort: Es ist $m = -\frac{3}{4}$. **(II)**

Bemerkung

Wir betrachten den Wert $m = 0$. Die Geradengleichung wird $y = 3$. Durch Gleichsetzen folgt $\frac{3}{x} = 3 \Rightarrow x = 1$ und es gibt genau einen Schnittpunkt. Damit erfüllt der Wert $m = 0$ die Bedingung. **(III)**

Lösungsweg **(I)** und **(II)** besagen dasselbe, stellen aber einen offenen Widerspruch zu **(III)** dar.

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?