Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 4

Untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{99970000n}{10003-3n}$ auf Monotonie.

Lösungsweg

Es ist $a_1 = 9997$ und $a_2 = 20000$. Wir merken: $a_1 < a_2$. Im Folgenden untersuchen wir nun den allgemeinen Fall.

$$\begin{aligned}
a_n &< a_{n+1} \\
\frac{99970000n}{10003-3n} &< \frac{99970000(n+1)}{10003-3(n+1)} && \mid : 99970000 \\
\frac{n}{10003-3n} &< \frac{n+1}{10000-3n} \\
n(10000-3n) &< (10003-3n)(n+1) \\
10000n - 3n^2 &< 10003n - 3n - 3n^2 + 10003 \\
10000n &< 10000n + 10003 \text{ und es stimmt für jedes } n\text{. Daraus folgt:}
\end{aligned}$$

Antwort: Die Folge ist streng monoton steigend.

Bemerkung

Wir ermitteln den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{99970000n}{10003-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{99970000n}{(\frac{10003}{n}-3)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{99970000}{\frac{10003}{n}-3} = \frac{99970000}{0-3} = -33323333{,}\overline{3}\,.$$

Die Folge startet also bei $a_1 = 9997$ und steigt nachher ständig Richtung $-33323333{,}\overline{3}$. Dies ist jedoch absurd, denn $-33323333{,}\overline{3} < 9997$.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?