

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(2|-1|2)$, $C(1|1|0)$, $D(-1|2|2)$. Untersuche, ob A , B , C , D die Eckpunkte eines Quadrates sind.

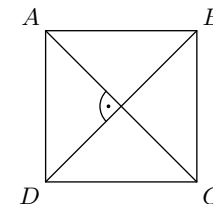
1. Lösungsweg

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (2-0)^2} = 3,$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (0-2)^2} = 3,$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2 + (2-0)^2} = 3,$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(0-(-1))^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2} = 3.$$



Die vier Strecken sind gleich lang. Daraus folgt: $ABCD$ ist ein Quadrat oder eine Raute. Wenn die Diagonalen senkrecht zueinander sind, dann ist $ABCD$ ein Quadrat. $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$. Dies bedeutet: Es ist $AC \perp BD$. Daraus folgt:

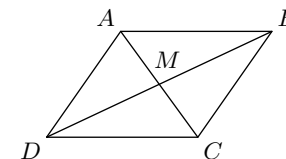
Antwort: Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

2. Lösungsweg

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (2-0)^2} = 3,$$

$$\overline{DC} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2} = 3,$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Dies bedeutet, dass $AB \parallel DC$. Weil zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind, ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Um auch ein Quadrat zu sein, muss $\overline{MA} = \overline{MB}$ gelten. Wir können M als Mittelpunkt der Strecke AC ermitteln: $M(\frac{0+1}{2} | \frac{0+1}{2} | \frac{0+0}{2})$, d. h. $M(0,5 | 0,5 | 0)$.

$\overline{MA} = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + 0} = \sqrt{0,5}$ und $\overline{MB} = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2 + 2^2} = \sqrt{8,5}$. Es ist also $\overline{MA} \neq \overline{MB}$. Daraus folgt:

Antwort: Das Viereck $ABCD$ ist kein Quadrat.

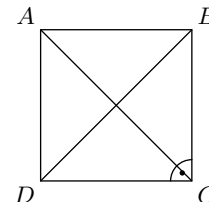
3. Lösungsweg

Wie im 1. Lösungsweg zeigen wir, dass $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 3$. Wenn wir noch zeigen könnten, dass einer der Winkel 90° ist, dann wäre $ABCD$ schon ein Quadrat.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\angle BCD = 90^\circ$. Daraus folgt:

Antwort: Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.



Die drei Lösungswege haben zu teils unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

Anm.: Mitverfasser dieser Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottersweier.