Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 8

Beweise: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Lösungsweg

Wir arbeiten mit vollständiger Induktion.
Es sei $A(n) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$

I. $[n=1]$ $\quad A(1) : \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{Quadrieren}} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$ und es stimmt.

II. $[A(n) \Rightarrow A(n+1)]$ $\quad A(n+1) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+3}}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}}_{x} \cdot \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{y} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3n}}}_{z} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3n+3}}}_{u}$$

Laut $A(n)$ ist $x \leq z$. Es ist noch zu zeigen, dass $y < u$.

$$\begin{aligned}
(2n+1)^2 \cdot (3n+3) &< 3n(2n+2)^2 \\
3(4n^2+4n+1) \cdot (n+1) &< 12n(n+1)^2 \qquad |: 3(n+1) \\
4n^2+4n+1 &< 4n^2+4n \\
1 &< 0
\end{aligned}$$

Dies ist aber offensichtlich falsch. Daraus folgt:
Die gestellte Aufgabe ist falsch. $(*)$

2. Lösungsweg

Zuerst zeigen wir: $A(n) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$. (1)

Wir arbeiten mit vollständiger Induktion.

Es sei $A(n) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

I. $[n = 1]$ $\quad A(1)$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ und es stimmt.

II. $[A(n) \rightarrow A(n+1)]$ $\quad A(n+1) : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}}_{x} \cdot \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{y} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3n+1}}}_{z} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}}_{u}$$

Laut $A(n)$ ist $x \leq z$. Es ist noch zu zeigen, dass $y < u$.

$$\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$$
$$(2n+1)^2 \cdot (3n+4) < (2n+2)^2 \cdot (3n+1)$$
$$(4n^2+4n+1) \cdot (3n+4) < (4n^2+8n+4)^2 \cdot (3n+1)$$
$$12n^3 + 12n^2 + 3n + 16n^2 + 16n + 4 < 12n^3 + 24n^2 + 12n + 4n^2 + 8n + 4$$
$$28n^2 + 19n + 4 < 28n^2 + 20n + 4 \text{ und dies stimmt.}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Andererseits gilt $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$. (2)

Aus (1) und (2) folgt:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$, was zu beweisen war. $(**)$

$(*)$ und $(**)$ stellen einen offenen Widerspruch dar.

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?