Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 2

Es sei $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+n}$. Untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Monotonie.

1. Lösungsweg

$$a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+n} = \frac{n^2(2-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n})} = \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

Wir setzen nun $\frac{1}{n} = x$. So erhalten wir die Hilfsfunktion $a(x) = \frac{2-x^2}{1+x}$ mit $x > 0$.

Es gilt $a'(x) = \frac{-2x(1+x)-(2-x^2)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(1+x)^2}$.

Wegen $x > 0$ gilt $a'(x) < 0$. Da die erste Ableitung negativ ist, ist das Schaubild von $a(x)$ im gesamten Intervall $]0, +\infty[$ monoton fallend.

Antwort: Die Folge ist monoton fallend.

2. Lösungsweg

Sei $a_n = \frac{2n^2-1}{n(n+1)}$. Wir arbeiten nun mit der Definition:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)^2-1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2-1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n(2n^2+4n+1)-(n+2)(2n^2-1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0 \text{ für jedes } n \geq 1 \end{aligned}$$

und damit gilt $a_{n+1} > a_n$.
Antwort: Die Folge ist monoton steigend.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?