

Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter <http://www.wurzel.org/werkstatt>.

Aufgabe 7

Ein Kapital von 10 000 € steigt bei festem Jahreszinssatz in 5 Jahren auf 15 000 €. Die Bank bietet auch folgende Alternative an: Die durchschnittliche vierteljährliche Kapitalerhöhung wird bereits nach dem ersten Quartal als vierteljährliche Zinszahlung dem Kapital zugefügt.

Berechne das Kapital nach 5 Jahren. Runde auf zwei Dezimalen.

1. Lösungsweg

Mit Hilfe der Zinseszinsformel ermitteln wir erst den jährlichen Zinssatz.

$$\begin{aligned}K_5 &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \\15\,000 &= 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 && | : 10\,000 \\1,5 &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 && | \sqrt[5]{} \\1,08447\dots &= 1 + \frac{p}{100} \\p &\approx 8,45\%\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der vierteljährliche Zinssatz: $8,45\% : 4 \approx 2,11\%$.

Fünf Jahre entsprechen 20 Vierteljahren. Wir wenden erneut die Zinseszinsformel an: $K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{2,11}{100}\right)^{20} \approx 15\,183,28\text{€}$

Antwort: Das Kapital würde dann etwa $15\,183,28\text{€}$ betragen.

2. Lösungsweg

Die Kapitalerhöhung von $5\,000\text{€}$ ($15\,000\text{€} - 10\,000\text{€}$) bedeutet einen durchschnittlichen Zuwachs von $1\,000\text{€}$ pro Jahr. Der durchschnittliche Zuwachs pro Vierteljahr ist damit $1\,000\text{€} : 4 = 250\text{€}$. Wir ermitteln nun den Prozentsatz:

$$10\,000\text{€} \hat{=} 100\%$$

$$250\text{€} \hat{=} p$$

$$p = \frac{250\text{€} \cdot 100\%}{10\,000\text{€}} = 2,5\%$$

Fünf Jahre entsprechen 20 Vierteljahren. Wir wenden die Zinseszinsformel an: $K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{20} \approx 16\,386,16\text{€}$

Antwort: Das Kapital würde dann etwa $16\,386,16\text{€}$ betragen.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?