Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

6. Aufgabe

In ein $n \times n$-Quadrat sollen die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ so eingetragen werden, dass in jeder Spalte und jeder Zeile jede Zahl genau einmal vorkommt. Wie viele solche Quadrate gibt es insgesamt für $n = 3$ bzw. $n = 4$?

$n = 3$

1. Lösungsweg

Ein gesuchtes Quadrat enthält genau drei 1-er, drei 2-er und drei 3-er. Erst tragen wir ins Quadrat die drei 1-er ein. In die erste Spalte können wir die erste 1 auf 3 Arten eintragen. In die zweite Spalte können wir die zweite 1 auf 2 Arten eintragen. Die dritte 1 können wir in die dritte Spalte auf nur einer Art eintragen. Aus der Produktregel folgt: Die 1-er kann man auf insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten ins Quadrat eintragen. Nun tragen wir die drei 2-er ein. In die erste Spalte können wir die erste 2 auf 2 Arten eintragen. In die zweite Spalte können wir die zweite 2 auf 1 Art eintragen. Die letzte 2 gelingt automatisch in die letzte Spalte. Aus der Produktregel folgt: Die 2-er kann man auf insgesamt $2 \cdot 1 = 2$ Arten ins Quadrat eintragen. Bei den 3-ern haben wir keine Wahl mehr. Aus der Produktregel folgt: $6 \cdot 2 = 12$.

Antwort: Es gibt insgesamt 12 Quadrate.

2. Lösungsweg

Wir füllen die erste Zeile mit $1, 2, 3$ aus und untersuchen, auf wie viele Arten kann das Quadrat vervollständigt werden. Durch systematisches Probieren erhalten wir diese 2 Möglichkeiten:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Die erste Zeile kann aber auf $3! = 6$ Möglichkeiten ausgefüllt werden. Aus der Produktregel folgt: $6 \cdot 2 = 12$.

Antwort: Es gibt insgesamt 12 Quadrate.

$n = 4$

1. Lösungsweg

Ein gesuchtes Quadrat enthält genau vier 1-er, vier 2-er , vier 3-er und vier 4-er. Erst tragen wir ins Quadrat die vier 1-er ein. In die erste Spalte können wir die erste 1 auf 4 Arten, in die zweite Spalte können wir die zweite 1 auf 3 Arten, in die dritte Spalte die dritte 1 auf 2 Arten, in die vierte Spalte die letzte 4 auf eine Art eintragen. Aus der Produktregel folgt: Die 1-er kann man auf insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Arten ins Quadrat eintragen. Nun tragen wir die vier 2-er ein. In die erste Spalte können wir die erste 2 auf 3 Arten, in die zweite Spalte können wir die zweite 2 auf 2 Arten, in die dritte Spalte die dritte 2 auf 1 Art eintragen. Die letzte 2 gelangt automatisch in die letzte Spalte. Aus der Produktregel folgt: Die 2-er kann man auf insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Arten ins Quadrat eintragen. Nun folgen die 3-er. In die erste Spalte können wir die erste 3 auf 2 Arten, in die zweite Spalte können wir die zweite 3 auf 1 Art eintagen. Der Rest passiert automatisch. Aus der Produktregel folgt: $2 \cdot 1 = 2$. Bei den 4-ern haben wir keine Wahl mehr. Aus der Produktregel folgt: $24 \cdot 5 \cdot 2 = 288$.

Antwort: Es gibt insgesamt 288 Quadrate.

2. Lösungsweg

Wir füllen die erste Zeile mit $1, 2, 3, 4$ aus und untersuchen, auf wie viele Arten das Quadrat vervollständigt werden kann. Wir arbeiten mit systematischem Probieren. Die Zeilen werden nach und nach von oben nach unten ausgefüllt. Auf diese Weise erhalten wir 24 Möglichkeiten:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3
3	4	1	2	3	4	2	1	4	3	1	2	4	3	2	1
4	3	2	1	4	3	1	2	3	4	2	1	3	4	1	2

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	4	1	3	2	4	1	3
3	4	1	2	4	1	2	3	3	1	4	2	4	3	2	1
4	1	2	3	3	4	1	2	4	3	2	1	3	1	4	2

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	1	4	2	3	1	4	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	4	1	3	4	3	2	1	2	1	4	3	2	3	4	1
4	3	2	1	2	4	1	3	4	3	2	1	4	1	2	3

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	2	1	3	4	2	1
4	1	2	3	4	3	2	1	2	1	4	3	4	3	1	2
2	3	4	1	2	1	4	3	4	3	1	2	2	1	4	3

1	2	3	4
4	1	2	3
2	3	4	1
3	4	1	2

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

1	2	3	4
4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4
4	3	2	1
2	4	1	3
3	1	4	2

1	2	3	4
4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

Die erste Zeile kann aber auf $4! = 24$ Möglichkeiten ausgefüllt werden. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es 24 Quadrate. Aus der Produktregel folgt $24 \cdot 24 = 576$.

Antwort: Es gibt insgesamt 576 Quadrate.

Die zwei Lösungswege haben für $n = 4$ zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

Anm.: Mitverfasser der Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottersweier.