Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 5

Der geometrische Ort der Extrema einer Funktionsschar dritten Grades sei $y = x^2$. Stelle einen Term für die Funktionsschar auf.

1. Lösungsweg

Wir streben den Extrempunkt $(t|t^2)$ an und konstruieren einen Term in mehreren Schritten.
1. Schritt: Die Hilfsfunktion $g(x) = (x-t)^2$ hat an der Stelle $x_0 = t$ einen Extrempunkt.
2. Schritt: Die Funktion $f(x) = x(x-t)^2 + t^2 = x^3 - 2tx^2 + t^2x + t^2$ ist dritten Grades und erfüllt die Bedingung $f(t) = t^2$.
3. Schritt: Wir machen die Probe. Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 4tx + t^2$. Die Bedingung $f'(t) = 0$ ist erfüllt, $(t|t^2)$ ist Extrempunkt. Mit $x = t$ und $y = t^2$ folgt $y = x^2$, die Gleichung des geometrischen Ortes.
Antwort: Ein möglicher Funktionsterm der Schar ist $f_t(x) = x(x-t)^2 + t^2$.

2. Lösungsweg

Es sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Die Punkte $B(1|1)$, $C(-1|1)$ liegen auf dem geometrischen Ort und sind damit Extrempunkte von f.

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0 \tag{1}$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow -3a + 2b - c = 0 \tag{2}$$

$$\text{Aus (1) und (2) folgt } b = 0 \text{ bzw. aus (1) folgt } c = -3a. \tag{3}$$

$$f(1) = 1 \rightarrow a + c + d = 1 \tag{4}$$

$$f(-1) = 1 \rightarrow -a - c + d = 1 \tag{5}$$

$$\text{Durch (4) und (5) folgt } d = 1. \text{ Aus (4) erhalten wir } c = -a. \tag{6}$$

Aus (3) und (6) folgt $a = 0$ – damit ist aber f nicht mehr dritten Grades – Widerspruch! Dies bedeutet:
Antwort: Die Aufgabe ist nicht lösbar.

3. Lösungsweg

Es sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Der Ursprung liegt auf dem geometrischen Ort. Aus $f(0) = 0$ folgt $d = 0$, aus $f'(0) = 0$ folgt $c = 0$. Damit ist $f(x) = ax^3 + bx^2$. Der Punkt $(u|u^2)$ liegt auf dem geometrischen Ort.

$$f(u) = u^2 \to au^3 + bu^2 = u^2 \to au + b = 1 \to b = 1 - au \tag{7}$$

$$f'(u) = 3au^2 + 2bu = au^2 + 2u = 0 \tag{8}$$

$$\text{Mit (7) in (8) folgt } a = -\frac{2}{u} \tag{9}$$

$$\text{Mit (9) in (7) folgt } b = 3. \tag{10}$$

Also bedeuten (9) und (10):
Antwort: Ein möglicher Funktionsterm der Schar ist $f(x) = -\frac{2}{u}x^3 + 3x^2$.

Die drei Lösungswege haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?