Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 4

Es sei $x_1 = 6$ und $x_{n+1} = \sqrt{9{,}99x_n - 24{,}95}$. Untersuche die Folge auf Monotonie und Beschränktheit und ermittle gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Monotonie: $x_2 = \sqrt{9{,}99 \cdot 6 - 24{,}95} \approx 5{,}915$. Wir stellen fest: $x_2 < x_1$.
Vermutung: Die Folge ist monoton fallend. Beweis durch vollständige Induktion ($A(n)$: $x_{n+1} < x_n$).
I. Induktionsanfang $n = 1$: $x_2 < x_1$ stimmt, siehe oben.
II. Induktionsschritt $A(n) \to A(n+1)$

$$\begin{aligned}
A(n+1): \qquad x_{n+2} &< x_{n+1} \\
\sqrt{9{,}99x_{n+1} - 24{,}95} &< \sqrt{9{,}99x_n - 24{,}95} && |\text{Quadrieren} \\
9{,}99x_{n+1} - 24{,}95 &< 9{,}99x_n - 24{,}95 \\
9{,}99x_{n+1} &< 9{,}99x_n \\
x_{n+1} &< x_n
\end{aligned}$$

und dies stimmt laut $A(n)$. Daraus folgt:

$$\text{Die Folge ist monoton fallend.} \tag{1}$$

Beschränktheit: $S = x_1 = 6$ wegen der Monotonie. Andererseits ist $s = 0$, denn das Ergebnis einer Quadratwurzel ist eine positive Zahl. Somit gilt: $0 \leq x_n \leq 6$ für jedes n. Daraus folgt:

$$\text{Die Folge ist beschränkt.} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt, dass die Folge konvergent ist.

Grenzwertberechnung: Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$. Der Grenzwertübergang $n \to \infty$ ergibt

$$g = \sqrt{9{,}99g - 24{,}95}\,. \tag{3}$$

Durch Quadrieren erhalten wir $g^2 = 9{,}99g - 24{,}95$ oder $g^2 - 9{,}99g + 24{,}95 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat als Lösungen $g_1 = 4{,}99$ und $g_2 = 5$. Eine direkte Probe zeigt, dass beide Zahlen die Gleichung (3) erfüllen. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4{,}99$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$.

Bemerkung

Eine konvergente Folge hat aber genau einen Grenzwert.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?