Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 2

Untersuche, ob $f(x) = \frac{x^2 - 2\cos x}{x^2}$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert hat und falls ja, berechne ihn.

1. Lösungsweg

Wegen „$\frac{\infty}{\infty}$“ wenden wir den Satz von l'Hospital an.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 2\sin x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 2\cos x}{2} = 1 + \lim_{x\to\infty} \cos x\,.$$

Nun hat $\cos x$ für $x \to \infty$ aber keinen Grenzwert. Tatsächlich, betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = n\pi \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, so ergibt $(\cos a_n) = (\cos n\pi)$ diese Folge: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ Die zwei Häufungspunkte $(-1 \neq 1)$ bedeuten aber, dass es keinen Grenzwert gibt.
Antwort: f hat für $x \to \infty$ keinen Grenzwert.

2. Lösungsweg

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{2\cos x}{x^2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2\cos x}{x^2}\right)\,.$$

Wegen $-1 \leq \cos x \leq 1$ gilt:

$$0 \xleftarrow{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0\,.$$

Dies bedeutet: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$. Daraus folgt:

Antwort: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2\cos x}{x^2} = 1$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?