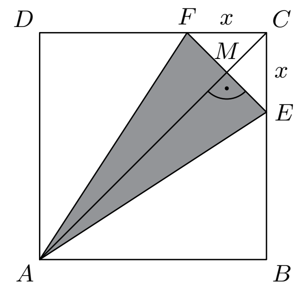
Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 8



Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ ist 3 cm. In dieses Quadrat wurde das Dreieck AEF einbeschrieben, sodass $\overline{EC} = \overline{FC}$ gilt (siehe Abbildung).
Untersuche den Flächeninhalt des Dreiecks AEF auf ein Minimum bzw. auf ein Maximum.

1. Lösungsweg

Es sei $\overline{EC} = \overline{FC} = x$.
Im Dreieck ECF folgt mit dem Satz des Pythagoras $\overline{EF}^2 = x^2 + x^2$ und so $\overline{EF} = x\sqrt{2}$.
Im Dreieck ABE folgt mit dem Satz des Pythagoras $\overline{AE}^2 = 3^2 + (3 - x)^2$ und daraus $\overline{AE} = \sqrt{x^2 - 6x + 18}$.
Im Dreieck AME folgt mit dem Satz des Pythagoras

$$\overline{AM}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{ME}^2 = x^2 - 6x + 18 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

und daraus $\overline{AM} = \sqrt{0{,}5x^2 - 6x + 18}$.

$$\begin{aligned} A_\triangle &= \frac{\overline{EF} \cdot \overline{AM}}{2} = \frac{x\sqrt{2} \cdot \sqrt{0{,}5x^2 - 6x + 18}}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{0{,}5x^2 - 6x + 18} \\ &= \sqrt{0{,}25x^4 - 3x^3 + 9x^2} = \sqrt{(0{,}5x^2 - 3x)^2}\,. \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $0{,}5x^2 - 3x = 0{,}5(x^2 - 6x) = 0{,}5(x^2 - 6x + 9 - 9) = 0{,}5(x - 3)^2 - 4{,}5$. Wegen $a = 0{,}5 > 0$ hat die quadratische Funktion ein Minimum. Der Scheitelpunkt ist $S(3 \mid -4{,}5)$. Da kein Flächeninhalt negativ werden kann, müssen wir das Ergebnis noch richtig deuten:

Antwort: Das Minimum des Flächeninhaltes beträgt $4{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

2. Lösungsweg

Es sei $\overline{EC} = \overline{FC} = x$.

$$\begin{aligned} A_\triangle &= A_{ABCD} - (2 \cdot A_{ABE} + A_{ECF}) = 3^2 - \left(2 \cdot \frac{3(3-x)}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= 9 - \left(9 - 3x + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 3x \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$-\frac{x^2}{2} + 3x = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 4{,}5$$

Wegen $a = -\frac{1}{2} < 0$ hat die quadratische Funktion ein Maximum. Der Scheitelpunkt ist $S(3 \mid 4{,}5)$. Wir müssen noch die Teilergebnisse richtig deuten:
Antwort: Das Maximum des Flächeninhaltes beträgt $4{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?