Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 7

Ermittle die Parameter p und q so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6x-9-x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{px+q}, & x \geq 0 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar wird.

Lösung

Außer bei $x = 0$ ist f stetig und differenzierbar. Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktion an der Stelle $x_0 = 0$.
Stetigkeit: Die Bedingung lautet $g_\ell = g_r = f(x_0)$, also Übereinstimmen der Grenzwerte „von links“ bzw. „von rechts“ mit dem Funktionswert $f(x_0)$.
Aus $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = f(0)$ folgt $-\frac{1}{9} = \frac{1}{q}$ und daraus $q = -9$.
Differenzierbarkeit: Für $x < 0$ ist $f'(x) = \frac{2x-6}{(6x-9-x^2)^2}$ und für $x > 0$ ist $f'(x) = \frac{-p}{(px+q)^2}$.
Aus der Bedingung $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f'(x)$ folgt $\frac{-6}{(-9)^2} = \frac{-p}{(-9)^2}$ und somit unmittelbar $p = 6$.
Antwort: Die gesuchten Werte lauten $p = 6$ und $q = -9$.

Bemerkung

Betrachten wir die Folge $x_n = \frac{3n+2}{2n}$. Es ergibt sich

$$f(x_n) = \frac{1}{6x_n - 9} = \frac{1}{6 \cdot \frac{3n+2}{2n} - 9} = \frac{n}{6} \xrightarrow{n \to \infty} \infty\,.$$

Eine in $\mathbb{R}$ stetige Funktion kann jedoch als Grenzwert an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht Unendlich haben.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?