Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 5

Untersuche, ob die unendliche Summe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ eine endliche Zahl darstellt und berechne sie gegebenenfalls.

Lösung

Wir untersuchen getrennt die Teilsummen mit gerader bzw. ungerader Anzahl von Summanden.

$s_{2n} \quad = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$s_{2n+2} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$

$s_{2n+2} = s_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > s_{2n}$, weil $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > 0$ ist. Dies bedeutet:

Die Teilfolge (s_{2n}) ist monoton steigend. (1)

Ferner gilt $s_{2n} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}$.

Da alle Klammern positiv sind, ist $s_{2n} < 1$ (2)

Andererseits ist $s_{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$. Da alle Klammern positiv sind, ist $s_{2n} > 0$

Aus (2) und (3) folgt, dass die Teilfolge (s_{2n}) beschränkt ist. (4)

Aus (1) und (4) folgt, dass die Teilfolge (s_{2n}) konvergent ist. (5)

Wir bezeichnen den Grenzwert mit s. Es sei also $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. (6)

$s_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$
$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$. Aber $s_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} s$ und $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Daraus folgt:
Die Teilfolge (s_{2n+1}) ist konvergent und hat den Grenzwert s. (7)

Aus (6) und (7) folgt, dass die gesamte Folge (s_n) gegen s konvergiert.

Dies bedeutet: Die unendliche Summe stellt die endliche Zahl s dar:
$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$
Um s zu ermitteln, wenden wir das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz an.
$s = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$
$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots$
Durch Berechnung der Klammern erhalten wir
$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2}s$.
Also $s = \frac{1}{2}s$. Daraus folgt $s = 0$.
Antwort: Die unendliche Summe ergibt Null. (I)

Bemerkung

$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$
Jede Klammer ist streng positiv.
Somit ist z. B. s größer als die erste Klammer: $s > \frac{1}{2}$. (II)

(I) und (II) stellen einen offenen Widerspruch dar.

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?