Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 9

12 weiße und 2 schwarze Karten werden gut gemischt. Danach werden sie einzeln gezogen. Wie oft muss man im Durchschnitt ziehen, bis man eine schwarze Karte bekommt?

1. Lösungsweg

Alle Karten sind gleichwahrscheinlich. Auf sechs weiße Karten kommt eine schwarze Karte. Wir ermitteln nun, wie oft man aus diesen sieben Karten im Schnitt ziehen muss, bis die schwarze Karte erscheint. Dazu führen wir eine Zufallsvariable ein. Es sei X die Anzahl der Ziehungen, bis die schwarze Karte erscheint. Nun berechnen wir den Erwartungswert der Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{7} x_i \cdot \mathcal{P}(x_i) = \sum_{i=1}^{7} i \cdot \frac{1}{7} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{28}{7} = 4\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Antwort: Im Schnitt müssen wir viermal ziehen.

2. Lösungsweg

Die 14 Karten seien in einer Reihe dargestellt. Es sei X die Anzahl der Ziehungen, bis die erste schwarze Karte erscheint. Nun berechnen wir den Erwartungswert der Zufallsvariablen.

Anmerkung: Es ist unmöglich, dass die erste schwarze Karte erst die 14-te ist. Daher ist $\mathcal{P}(x_{14}) = 0$.

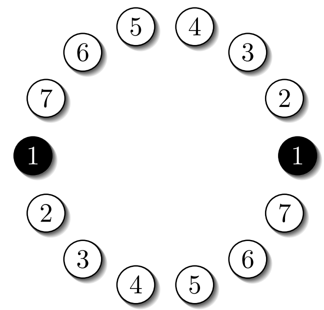
$$
\begin{aligned}
E(X) = \sum_{i=1}^{14} x_i \cdot \mathcal{P}(x_i) = \sum_{i=1}^{13} x_i \cdot \mathcal{P}(x_i) + 14 \cdot 0 = \sum_{i=1}^{13} i \cdot \frac{14-i}{\binom{14}{2}} \\
= \frac{1 \cdot 13 + 2 \cdot 12 + \cdots + 13 \cdot 1}{\binom{14}{2}} = \frac{455}{91} = 5\,.
\end{aligned}
$$

Begründung: Die Anzahl der möglichen Fälle ist stets $\binom{14}{2}$. Wenn die i-te Karte die erste schwarze Karte ist, dann gibt es noch $14 - i$ nicht gezogene Karten, darunter irgendwo noch eine schwarze. Sie kann auf $14 - i$ Arten platziert werden.

Antwort: Im Schnitt müssen wir fünfmal ziehen.

3. Lösungsweg

Die 14 Karten seien kreisförmig angeordnet. Aus Symmetriegründen wird die Verteilung aus der Abbildung rechts untersucht. Hier gibt es keine erste Stelle; bei welcher Kugel wir beginnen, ist beliebig. Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir alle möglichen Fälle untersuchen. Die Zahlen in den Kreisen geben an, wie viele Ziehungen nötig wären, wenn wir bei der jeweiligen Karte anfingen. Es sei X die Anzahl der Ziehungen, bis die erste schwarze Karte erscheint.



Wir berechnen nun den Erwartungswert der Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{i=1}^{14} x_i \cdot \mathcal{P}(x_i)\\ &= 1\cdot\frac{1}{14}+7\cdot\frac{1}{14}+6\cdot\frac{1}{14}+\cdots+2\cdot\frac{1}{14}+1\cdot\frac{1}{14}+7\cdot\frac{1}{14}+\cdots+2\cdot\frac{1}{14}\\ &= 4\,.\end{aligned}$$

Anmerkung: Wegen des Kommutativgesetzes ist es egal, an welcher Stelle wir anfangen.
Antwort: Im Schnitt müssen wir viermal ziehen.
Die drei Lösungswege haben zu teils unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?
Anm.: Mitverfasser dieser Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottersweier.