Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 7

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to I$ und $g : I \to I$, $g(x) = f(f(x))$.

a) Beweise: Wenn die Funktion f streng monoton ist in I, dann ist die Funktion g streng monoton steigend in I.

b) Entscheide, ob die Umkehrung der Aussage in a) richtig oder falsch ist.

a) **Lösung**

1. Fall: f ist streng monoton steigend.
Es seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Aus der Definition der Monotonie folgt:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$, d. h. $g(x_1) < g(x_2)$.
2. Fall: f ist streng monoton fallend.
Es seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Aus der Definition der Monotonie folgt:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$, d. h. $g(x_1) < g(x_2)$.
Damit ist bewiesen, dass g streng monoton steigend ist.

b) **1. Lösungsweg**

Es seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Da die Funktion g streng monoton steigend ist, gilt $f(f(x_1) < f(f(x_2)$. Daraus folgt:

$$\frac{f(f(x_1)) - f(f(x_2))}{x_1 - x_2} > 0\,. \tag{1}$$

Die obige Ungleichung kann auch noch so geschrieben werden:

$$\frac{f(f(x_1)) - f(f(x_2))}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\,. \tag{2}$$

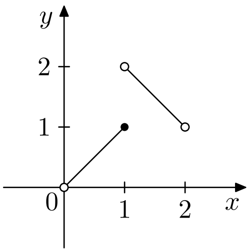
Anmerkung: Wegen (1) ist $f(x_1) \neq f(x_2)$ und somit $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$.
Aus (2) folgt:

$$\tfrac{f(f(x_1))-f(f(x_2))}{f(x_1)-f(x_2)} \quad \text{und} \quad \tfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \quad \text{haben dasselbe Vorzeichen.} \tag{3}$$

1. Fall: $\frac{f(f(x_1))-f(f(x_2))}{f(x_1)-f(x_2)} > 0$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$.
Es seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Dann ist $x_1 - x_2 < 0$ und damit $f(x_1) - f(x_2) < 0$, also $f(x_1) < f(x_2)$. Mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ erhalten wir $y_1 < y_2$ bzw. $f(y_1) < f(y_2)$. In diesem Fall ist f streng monoton steigend.
2. Fall: $\frac{f(f(x_1))-f(f(x_2))}{f(x_1)-f(x_2)} < 0$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$.
Es seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Dann ist $x_1 - x_2 < 0$ und damit $f(x_1) - f(x_2) > 0$, also $f(x_1) > f(x_2)$. Mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ erhalten wir $y_1 > y_2$ bzw. $f(y_1) < f(y_2)$. In diesem Fall ist f streng monoton fallend.
In beiden Fällen ist also f streng monoton. Daraus folgt:
Antwort: Die Umkehrung der Aussage vom Punkt a) ist richtig.

2. Lösungsweg

Es sei $I = (0, 2)$. Wir betrachten folgendes Beispiel:



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 3 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Für $0 < x \leq 1$ ist $f(x) = x$ und damit auch $f(f(x)) = f(x) = x$.
Für $1 < x < 2$ ist $f(x) = 3 - x > 1$ und $f(f(x)) = f(3 - x) = 3 - (3 - x) = x$.
Wir haben also gezeigt: $f(f(x)) = x$, für jedes x aus $I = (0, 2)$. Daraus folgt:

g ist streng monoton steigend. (4)

Andererseits ist f offensichtlich nicht monoton (siehe Figur). (5)

Aus (4) und (5) folgt:

Antwort: Die Umkehrung der Aussage vom Punkt a) ist falsch.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?